Empiricism Journal
https://journal-center.litpam.com/index.php/empiricism
email: empiric.journal@gmail.com

Vol. 7, No 1, Maret 2026
e-ISSN: 2745-7613
pp. 577-589

Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Garis dan Graf Tengah dari Hasil Operasi Comb Graf Bintang C_3 dan Graf Bintang S_n

Abdul Halim Antula*, Nurwan, Nisky Imansyah Yahya, Emli Rahmi, Armayani Arsal
Universitas Negeri Gorontalo, Jalan Jenderal Sudirman No. 6, Kelurahan Dulalowo Timur, Gorontalo, Indonesia 96128.
Email Korespondensi: abdulhalimantula1343@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menentukan bilangan terhubung titik pelangi (*rainbow vertex connection number*) pada graf garis dan graf tengah yang diperoleh dari hasil operasi comb antara graf lingkaran C_3dan graf bintang S_n, dengan $n \geq 3$. Penelitian ini merupakan kajian teoretis dengan pendekatan studi literatur melalui analisis konsep teori graf, operasi comb, graf garis, graf tengah, serta pewarnaan titik pelangi. Penentuan nilai bilangan terhubung titik pelangi dilakukan dengan menganalisis struktur graf, menentukan diameter graf, mengonstruksi fungsi pewarnaan titik, dan memverifikasi keberadaan lintasan titik pelangi untuk setiap pasangan titik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan terhubung titik pelangi pada graf garis $L(C_3 \triangleright S_n)$adalah $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n)) = 1$. Sementara itu, pada graf tengah $M(C_3 \triangleright S_n)$, diperoleh $\mathrm{rvc}\,(M(C_3 \triangleright S_n)) = 3n + 1$. Hasil ini menunjukkan bahwa transformasi graf hasil operasi comb ke dalam bentuk graf garis dan graf tengah menghasilkan kebutuhan warna yang berbeda. Temuan ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan kajian pewarnaan pelangi, khususnya pada graf hasil operasi dan graf hasil transformasi.

Kata kunci: Bilangan Terhubung Titik Pelangi, Graf Garis, Graf Tengah, Graf Lingkaran, Graf Bintang, Operasi Comb.

Rainbow Vertex Connection Number of the Line Graph and the Middle Graph of the Comb Operation on the Star Graph C_3 and the Star Graph S_n

Abstract

This study aims to determine the rainbow vertex connection number of the line graph and the middle graph obtained from the comb operation between the cycle graph $C_3$and the star graph S_n, where $n \geq 3$. This research is a theoretical study using a literature-based approach through the analysis of graph theory concepts, comb operation, line graph, middle graph, and rainbow vertex coloring. The determination of the rainbow vertex connection number was carried out by analyzing the graph structure, determining the graph diameter, constructing a vertex-coloring function, and verifying the existence of rainbow vertex paths for each pair of vertices. The results show that the rainbow vertex connection number of the line graph $L(C_3 \triangleright S_n)$is $rvc\,(L(C_3 \triangleright S_n)) = 1$. Meanwhile, for the middle graph $M(C_3 \triangleright S_n)$, it is obtained that $rvc\,(M(C_3 \triangleright S_n)) = 3n + 1$. These results indicate that transforming the graph obtained from the comb operation into its line graph and middle graph produces different coloring requirements. The findings contribute to the development of rainbow coloring studies, particularly on graphs resulting from graph operations and graph transformations.

Keywords: *Rainbow Vertex Connection Number, Line Graph, Middle Graph, Cycle Graph, Star Graph, Comb Operation.*

How to Cite: Antula, A. H., Nurwan, N., Yahya, N. I., Rahmi, E., & Arsal, A. (2026). Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Garis dan Graf Tengah dari Hasil Operasi Comb Graf Bintang C3 dan Graf Bintang Sn. *Empiricism Journal*, *7*(1), 577-589. https://doi.org/10.36312/ej.v7i1.4733

https://doi.org/10.36312/ej.v7i1.4733

Copyright© 2026, Antula et al.
This is an open-access article under the CC-BY-SA License.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam matematika diskrit yang terus berkembang karena kemampuannya merepresentasikan hubungan antarobjek secara sederhana, terstruktur, dan analitis. Dalam teori graf, objek direpresentasikan sebagai titik, sedangkan hubungan antarobjek direpresentasikan sebagai sisi. Representasi ini memungkinkan berbagai persoalan nyata, seperti jaringan komunikasi, penjadwalan, distribusi logistik, optimasi rute, dan alokasi sumber daya, dimodelkan ke dalam bentuk matematis yang dapat dianalisis secara sistematis. Perkembangan teori graf tidak hanya

terbatas pada kajian struktur dasar graf, tetapi juga meluas pada berbagai parameter graf, seperti keterhubungan, dominasi, pelabelan, metrik graf, dan pewarnaan. Di antara berbagai topik tersebut, pewarnaan graf menjadi salah satu kajian yang penting karena berkaitan erat dengan masalah optimasi dan pengaturan konflik antarobjek.

Secara umum, pewarnaan graf adalah proses pemberian warna pada elemen-elemen graf, baik titik, sisi, maupun wilayah, dengan aturan tertentu. Pada pewarnaan titik klasik, dua titik yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama, dan jumlah minimum warna yang diperlukan untuk memenuhi aturan tersebut disebut bilangan kromatik. Kajian pewarnaan graf terus berkembang dalam berbagai arah, baik secara teoritis maupun aplikatif. Dalam konteks aplikatif, pewarnaan graf banyak digunakan untuk menyelesaikan persoalan penjadwalan, seperti penjadwalan mata pelajaran, penjadwalan guru, penjadwalan praktik dokter, serta pengaturan distribusi sumber daya agar tidak terjadi konflik antaraktivitas (Yusak et al., 2024; Listiyaningrum, 2025; Tonis et al., 2025). Selain itu, pewarnaan graf juga telah diterapkan pada optimasi distribusi logistik, misalnya dalam pengelompokan wilayah distribusi untuk meningkatkan efisiensi operasional (Nuryatma, 2024). Fakta ini menunjukkan bahwa pewarnaan graf memiliki posisi penting dalam pengembangan teori graf sekaligus dalam pemodelan berbagai masalah nyata.

Dalam perkembangan teoritisnya, pewarnaan graf tidak hanya mencakup pewarnaan titik konvensional, tetapi juga berkembang menjadi berbagai variasi, seperti pewarnaan sisi, pewarnaan total, pewarnaan ketakteraturan lokal, bilangan kromatik permainan, dan pewarnaan pelangi. Kajian terhadap variasi-variasi tersebut menunjukkan bahwa perubahan aturan pewarnaan dapat menghasilkan parameter graf yang berbeda dan memerlukan strategi pembuktian yang berbeda pula. Misalnya, Kristiana dan Saputra (2024) membahas pewarnaan titik ketakteraturan lokal, sedangkan Abdurahman et al. (2024) mengkaji bilangan kromatik permainan pada beberapa graf khusus. Penelitian-penelitian tersebut memperlihatkan bahwa graf dengan struktur berbeda dapat memiliki kebutuhan warna yang berbeda pula, sehingga kajian mengenai parameter pewarnaan pada kelas graf tertentu tetap menjadi topik yang relevan dalam teori graf modern.

Salah satu pengembangan penting dari pewarnaan graf adalah pewarnaan pelangi atau rainbow coloring. Konsep ini pertama kali diperkenalkan dalam konteks rainbow connection, yaitu pewarnaan sisi pada graf sedemikian sehingga setiap pasangan titik dihubungkan oleh suatu lintasan yang sisi-sisinya memiliki warna berbeda. Bilangan minimum warna yang diperlukan agar suatu graf memenuhi kondisi tersebut disebut bilangan terhubung pelangi atau rainbow connection number (Chartrand et al., 2008). Kajian mengenai rainbow connection terus berkembang pada berbagai kelas graf dan struktur jaringan. Beberapa penelitian terbaru juga menunjukkan bahwa konsep rainbow connection masih menjadi topik aktif, baik pada graf berarah, jaringan rekursif, maupun variasi graf yang memuat kendala warna tertentu (Wang & Hsu, 2024; Wang et al., 2024; Babiński et al., 2025; Cairncross et al., 2025; Li, 2025). Perkembangan tersebut menunjukkan bahwa pewarnaan pelangi memiliki cakupan luas dan berperan penting dalam memahami pola keterhubungan graf.

Variasi lain dari rainbow connection adalah rainbow vertex connection. Jika rainbow connection berfokus pada pewarnaan sisi, maka rainbow vertex connection berfokus pada pewarnaan titik. Bilangan terhubung titik pelangi atau rainbow vertex connection number, yang dinotasikan dengan $\mathrm{rvc}\,(G)$, merupakan jumlah minimum warna yang diperlukan pada titik-titik graf Gsehingga setiap pasangan titik dihubungkan oleh suatu lintasan yang titik-titik internalnya memiliki warna berbeda. Konsep ini dikembangkan oleh Krivelevich dan Yuster (2009) sebagai variasi dari pewarnaan pelangi pada graf. Dalam konteks ini, yang menjadi perhatian utama bukan warna sisi pada lintasan, melainkan warna titik-titik internal yang dilalui oleh lintasan tersebut. Oleh karena itu, struktur internal graf, letak titik penghubung, diameter graf, derajat titik, serta pola lintasan antar titik sangat memengaruhi nilai $\mathrm{rvc}\,(G)$.

Kajian mengenai bilangan terhubung titik pelangi terus berkembang pada berbagai kelas graf. Beberapa penelitian telah menentukan nilai $\mathrm{rvc}\,(G)$pada graf khusus dan graf hasil konstruksi tertentu, seperti graf amalgamasi (Akadji et al., 2019), graf bunga (Taha et al., 2021), graf hasil operasi korona (Lihawa et al., 2022), serta berbagai konstruksi graf lainnya, termasuk graf kuadratik dan graf kembang api (Fran et al., 2020). Penelitian terbaru juga membahas rainbow vertex connection number pada beberapa graf khusus, seperti bull graph,

net graph, triangular ladder graph, dan composition graph $P_n[P_1]$(Annadhifi et al., 2024a). Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa nilai $\mathrm{rvc}\,(G)$sangat dipengaruhi oleh struktur lokal graf, keberadaan titik pusat, banyaknya titik berderajat tinggi, serta posisi titik-titik yang menjadi penghubung utama dalam lintasan. Dengan demikian, penentuan bilangan terhubung titik pelangi tidak dapat hanya didasarkan pada banyaknya titik, tetapi harus dianalisis melalui struktur konektivitas graf secara menyeluruh.

Selain pada graf tunggal, kajian bilangan terhubung titik pelangi juga penting diterapkan pada graf hasil operasi. Operasi graf merupakan cara membentuk graf baru dari satu atau lebih graf yang telah diketahui. Melalui operasi graf, struktur awal dapat berubah menjadi graf yang lebih kompleks, baik dari segi jumlah titik, jumlah sisi, diameter, maupun pola keterhubungannya. Graf hasil operasi sering memiliki karakteristik yang tidak langsung dapat disimpulkan dari graf penyusunnya. Oleh karena itu, penelitian terhadap graf hasil operasi menjadi penting karena dapat memperluas pemahaman mengenai perilaku parameter graf, termasuk bilangan terhubung titik pelangi. Dalam beberapa kajian, operasi graf juga terbukti menghasilkan struktur baru dengan pola pewarnaan dan parameter graf yang khas (Hadiputra & Maryati, 2024; Imran et al., 2024).

Salah satu operasi graf yang relevan dalam kajian ini adalah operasi comb. Operasi comb merupakan operasi yang melekatkan salinan suatu graf pada setiap titik dari graf lainnya melalui titik tertentu yang berperan sebagai akar. Struktur yang dihasilkan menyerupai graf utama dengan beberapa cabang atau salinan graf yang terhubung pada titik-titik tertentu. Pola ini menyebabkan terbentuknya lintasan internal yang beragam dan memungkinkan munculnya konfigurasi konektivitas yang lebih kompleks. Dalam konteks rainbow vertex connection, kompleksitas tersebut penting karena nilai $\mathrm{rvc}\,(G)$ditentukan oleh keberadaan lintasan yang titik-titik internalnya harus memiliki warna berbeda. Beberapa penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa operasi graf tertentu dapat menghasilkan pola bilangan terhubung titik pelangi yang khas dan bergantung pada struktur graf penyusunnya (Yahya et al., 2023). Oleh karena itu, operasi comb menjadi menarik untuk dikaji karena mampu menggabungkan sifat graf dasar menjadi struktur baru yang lebih kompleks.

Graf lingkaran dan graf bintang merupakan dua kelas graf dasar yang banyak digunakan dalam konstruksi graf hasil operasi. Graf lingkaran memiliki pola siklik yang teratur, sedangkan graf bintang memiliki satu titik pusat yang terhubung dengan sejumlah titik daun. Kedua struktur ini memiliki karakteristik konektivitas yang berbeda. Graf lingkaran menyediakan jalur siklik yang memungkinkan hubungan antar titik melalui dua arah, sedangkan graf bintang menunjukkan pola keterpusatan melalui satu titik utama. Ketika graf lingkaran C_3dikombinasikan dengan graf bintang $S_n$melalui operasi comb, terbentuk graf dengan pola siklik pada bagian utama dan struktur bercabang pada setiap titik tertentu. Kombinasi ini menghasilkan graf yang menarik untuk dikaji karena mempertemukan keteraturan siklus dengan sifat sentral dari graf bintang.

Selain operasi comb, transformasi graf juga dapat menghasilkan struktur baru yang memiliki karakteristik berbeda dari graf asalnya. Dua transformasi yang menjadi fokus dalam penelitian ini adalah graf garis dan graf tengah. Graf garis atau line graph dari suatu graf G, yang dinotasikan dengan $L(G)$, dibentuk dengan menjadikan setiap sisi pada graf Gsebagai titik pada graf baru. Dua titik pada $L(G)$bertetangga apabila sisi-sisi yang bersesuaian pada graf Gsaling berinsidensi atau memiliki titik ujung yang sama. Transformasi ini mengubah relasi antar sisi pada graf asal menjadi relasi antar titik pada graf baru. Akibatnya, pola konektivitas pada graf garis dapat berbeda secara signifikan dari graf asalnya.

Sementara itu, graf tengah atau middle graph dari suatu graf G, yang dinotasikan dengan $M(G)$, memuat titik-titik dari graf asal dan titik-titik yang merepresentasikan sisi-sisi graf asal. Dalam graf tengah, hubungan dibentuk berdasarkan ketetanggaan sisi dan insidensi antara titik dan sisi pada graf asal. Dengan demikian, graf tengah dapat dipandang sebagai struktur yang menggabungkan sifat graf asal dan graf garisnya. Struktur semacam ini cenderung lebih kompleks karena memuat relasi antara titik asli, titik hasil transformasi sisi, serta hubungan insidensi di antara keduanya. Kompleksitas ini menjadikan graf tengah menarik untuk dianalisis dalam konteks bilangan terhubung titik pelangi karena penambahan titik dan sisi baru dapat mengubah diameter, lintasan internal, dan kebutuhan warna minimum.

Kajian terhadap graf garis dan graf tengah dari hasil operasi comb penting dilakukan karena transformasi tersebut dapat mengubah nilai parameter graf secara tidak sederhana. Pada satu sisi, pembentukan graf garis dapat memperkuat hubungan antar elemen yang sebelumnya berupa sisi sehingga memungkinkan lintasan antar titik menjadi lebih pendek. Pada sisi lain, pembentukan graf tengah dapat menambah jumlah titik dan memperluas struktur lintasan karena melibatkan titik asal serta titik hasil representasi sisi. Perbedaan struktur ini berpotensi menghasilkan nilai bilangan terhubung titik pelangi yang berbeda meskipun keduanya berasal dari graf awal yang sama. Dengan demikian, diperlukan analisis khusus untuk menentukan nilai eksak $\mathrm{rvc}\,(G)$pada kedua graf turunan tersebut.

Berdasarkan perkembangan penelitian terdahulu, masih terdapat ruang kajian yang perlu dikembangkan, khususnya mengenai bilangan terhubung titik pelangi pada graf garis dan graf tengah dari hasil operasi comb antara graf lingkaran dan graf bintang. Sebagian besar penelitian sebelumnya masih berfokus pada graf khusus, graf hasil operasi tertentu, atau parameter graf lain, seperti pelabelan, dominasi, metrik graf, pewarnaan klasik, dan bilangan kromatik permainan (Kusuma & Prasetyo, 2020; Umilasari & Darmaji, 2015; Batiha et al., 2024; Abdurahman et al., 2024). Sementara itu, kajian yang secara khusus menentukan bilangan terhubung titik pelangi pada $L(C_3 \triangleright S_n)$dan $M(C_3 \triangleright S_n)$masih terbatas. Padahal, kedua graf tersebut memiliki struktur yang berbeda dan berpotensi menghasilkan pola pewarnaan titik pelangi yang khas.

Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada penentuan bilangan terhubung titik pelangi pada graf garis dan graf tengah yang dibentuk dari hasil operasi comb graf lingkaran C_3dan graf bintang S_n. Secara khusus, penelitian ini bertujuan menentukan nilai $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n))$dan $\mathrm{rvc}\,(M(C_3 \triangleright S_n))$melalui analisis struktur graf, diameter, konstruksi pewarnaan titik, serta pembuktian keberadaan lintasan titik pelangi. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperkaya literatur mengenai rainbow vertex connection number, khususnya pada graf hasil operasi dan graf hasil transformasi, serta menjadi landasan bagi penelitian lanjutan pada kelas graf lain yang memiliki struktur lebih kompleks.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis dengan pendekatan studi literatur (*library research*). Pendekatan ini digunakan karena objek kajian berupa konsep dan pembuktian matematis dalam teori graf, khususnya bilangan terhubung titik pelangi pada graf hasil operasi. Literatur yang dikaji meliputi konsep graf lingkaran C_3, graf bintang S_n, operasi comb, graf garis, graf tengah, pewarnaan pelangi, serta bilangan terhubung titik pelangi. Sumber yang digunakan berasal dari buku teori graf, artikel jurnal nasional dan internasional, serta hasil penelitian terdahulu yang relevan dengan pewarnaan graf dan graf hasil operasi.

Kajian ini mengacu pada konsep dasar pewarnaan pelangi yang diperkenalkan oleh Chartrand et al. (2008) serta bilangan terhubung titik pelangi yang dikembangkan oleh Krivelevich dan Yuster (2009). Selain itu, penelitian terdahulu mengenai bilangan terhubung titik pelangi pada berbagai kelas graf dan graf hasil operasi juga digunakan sebagai dasar pengembangan analisis, antara lain penelitian pada graf amalgamasi (Akadji et al., 2019), graf hasil operasi korona (Lihawa et al., 2022), graf hasil operasi comb (Yahya et al., 2023), serta beberapa graf khusus lainnya (Annadhifi et al., 2024a). Rujukan tersebut digunakan untuk memperkuat landasan konseptual dan strategi pembuktian dalam menentukan nilai eksak $\mathrm{rvc}\,(G)$. Tahapan penelitian dilakukan sebagai berikut.

1. **Kajian literatur**

   Peneliti mengumpulkan dan mempelajari referensi yang berkaitan dengan teori graf, graf lingkaran, graf bintang, operasi comb, graf garis, graf tengah, pewarnaan pelangi, dan bilangan terhubung titik pelangi. Tahap ini bertujuan memperoleh landasan teori yang diperlukan untuk membangun definisi graf dan menyusun strategi pembuktian.

2. **Konstruksi graf**

   Peneliti mendefinisikan graf hasil operasi comb antara graf lingkaran C_3dan graf bintang S_n. Selanjutnya, dari graf tersebut dibentuk graf garis $L(C_3 \triangleright S_n)$dan graf tengah $M(C_3 \triangleright S_n)$. Pada tahap ini ditentukan himpunan titik dan himpunan sisi dari masing-masing graf agar struktur graf yang dikaji dapat dianalisis secara sistematis.

3. **Analisis struktur dan diameter graf**
   Setelah graf dikonstruksi, peneliti menganalisis pola ketetanggaan, lintasan antar titik, dan diameter graf. Analisis diameter diperlukan karena diameter graf berhubungan dengan panjang lintasan terpendek maksimum antar pasangan titik dan dapat digunakan sebagai dasar dalam menentukan batas bawah bilangan terhubung titik pelangi.

4. **Konstruksi fungsi pewarnaan titik**
   Peneliti menyusun fungsi pewarnaan titik $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$pada graf yang dikaji. Fungsi pewarnaan ini digunakan untuk menunjukkan bahwa setiap pasangan titik pada graf dapat dihubungkan oleh suatu lintasan titik pelangi, yaitu lintasan yang titik-titik internalnya memiliki warna berbeda.

5. **Pembuktian nilai bilangan terhubung titik Pelangi**
   Penentuan nilai $\mathrm{rvc}\ (G)$dilakukan dengan membuktikan batas bawah dan batas atas. Batas bawah diperoleh melalui analisis struktur graf, diameter, dan kebutuhan minimum warna pada titik-titik tertentu. Batas atas dibuktikan dengan memberikan konstruksi pewarnaan yang memenuhi syarat keterhubungan titik pelangi. Jika batas bawah dan batas atas menghasilkan nilai yang sama, maka diperoleh nilai eksak bilangan terhubung titik pelangi pada graf tersebut.

6. **Verifikasi lintasan titik Pelangi**
   Peneliti memeriksa setiap pasangan titik berdasarkan kategori atau pola ketetanggaannya. Verifikasi dilakukan dengan menunjukkan bahwa untuk setiap pasangan titik terdapat lintasan yang titik-titik internalnya memiliki warna berbeda. Tahap ini disajikan melalui uraian matematis dan tabel lintasan pelangi untuk mendukung pembuktian teorema.

7. **Perumusan Kesimpulan**
   Tahap akhir penelitian adalah merumuskan kesimpulan berdasarkan teorema yang telah dibuktikan. Kesimpulan memuat nilai bilangan terhubung titik pelangi pada graf garis $L(C_3 \triangleright S_n)$dan graf tengah $M(C_3 \triangleright S_n)$, serta implikasinya terhadap pengembangan kajian pewarnaan pelangi pada graf hasil operasi.

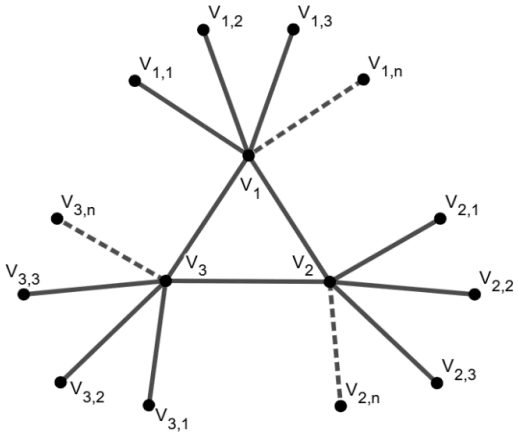
HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf $(\boldsymbol{C_3 \triangleright S_n})$

Definisi 1. Misalkan n bilangan bulat dengan $n \geq 3$, $(C_3 \triangleright S_n)$ merupakan graf hasil operasi comb dari graf lingkaran dan graf bintang. Misalkan $(C_3 \triangleright S_n)$ merupakan graf G. Maka graf G dibentuk oleh himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_i | i \in [1,n]\} \cup \{v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\}$
$E(G) = \{v_i v_j | [1 \leq i < j \leq 3]\} \cup \{v_i v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\}$

Berikut gambar graf garis dari graf hasil operasi comb graf lingkaran (C_3) dan graf bintang (S_n)



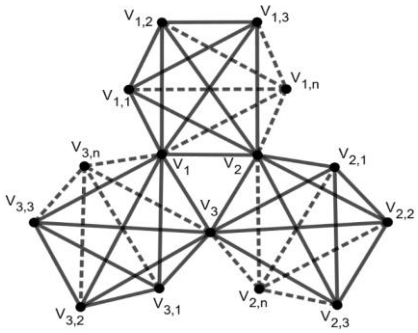
Gambar 1. Graf $(\boldsymbol{C_3 \triangleright S_n})$

Graf Grais $(\boldsymbol{C_3 \triangleright S_n})$

Definisi 2. Misalkan n bilangan bulat dengan $n \geq 3$, $L(C_3 \triangleright S_n)$ adalah graf terbentuk melalui pembentukan graf garis dari graf hasil operasi comb graf lingkaran $C3$ dan graf bintang Sn. Maka, graf G dibentuk oleh himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi E(G) berturut turut didefinisikan sebagai berikut:

$$V(G) = \{v_i | i \in [1,n]\} \cup \{v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\}$$
$$E(G) = \{v_i v_j | [1 \leq i < j \leq 3]\} \cup \{v_i v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\} \cup$$
$$\{v_i v_{k,j} | i \in [1,3], k = ((i+1 \ mod\ 3)+1),\ j \in [1,n]\} \cup$$
$$\{v_{i,j} v_{i,k} | i \in [1,3], 1 \leq i < j \leq 3\}$$

Berikut merupakan gambar graf garis dari hasil operasi comb graf lingkaran dan graf bintang $(L\ (C_3 \triangleright S_n))$:



Gambar 2. Graf $\boldsymbol{L(C_3 \triangleright S_n)}$

a) Diameter Graf $L(C_3 \triangleright S_n)$

Berdasarkan analisis lintasan diperoleh:

$$diam(L(C_3 \triangleright S_n)) = 2$$

b) Bilangan Terhubung Pelangi Graf $L(C_3 \triangleright S_n)$

Teorema 1. Misalkan n merupakan bilangan bulat dengan $n \geq 3$ dan $G \cong L(C_3 \triangleright S_n)$ maka:

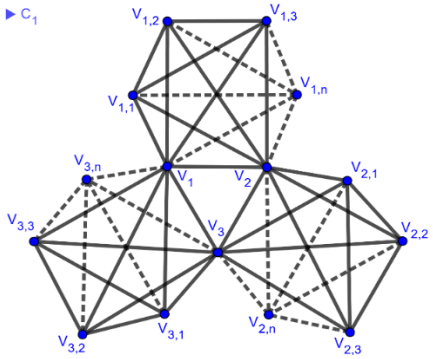
$$rvc(L(C_3 \triangleright S_n)) \geq 1$$

Bukti. Berdasarkan teorema yang tercantum dalam referensi Krivelevich dan Yuster (2009), dinyatakan bahwa $rvc(G) \geq diam(G) - 1$. Jika $rvc(G) = diam(G) - 1$, maka cukup menunjukkan terdapat lintasan Pelangi dengan pewarnaan c : V (G) $\rightarrow \{1,2,\ldots,rvc(G)\}$. Jika $rvc(G) = diam(G) - 1$ atau $rvc(G) \geq diam(G) - 1$, maka pembuktian dilakukan dengan metode kontradiksi.

Karena diketahui $rvc(G) = diam(G) - 1$ cukup menunjukan adanya lintasan pelangi dengan pewarnaan $c : V\ (G) \rightarrow \{1,2,\ldots,rvc(G)-1\}$. Pada graf L$(C_3 \triangleright S_n)$ dengan $n \geq 3$ yang dikonstruksi sebagai berikut:

$$c(v_i) = 1 \mid i \in [1,3]$$
$$c(v_{i,j}) = 1 \mid i \in [1,3], j \in [1,n]$$

Ilustrasi pewarnaan titik pelangi pada graf $L(C_3 \triangleright S_n)$ dengan $n \geq 3$ dapat dilihat pada gambar 3.



Gambar 3. Pewarnaan titik pelangi $\boldsymbol{L(C_3 \triangleright S_n)}$

Berikut ini adalah tabel lintasan pelangi untuk setiap pasangan $x, y \in G$ dengan pewarnaan c pada graf garis dari graf $L(C_3 \triangleright S_n)$.

Tabel 1. Lintasan pelangi graf $\boldsymbol{L(C_3 \triangleright S_n)}$

No	x	y	Kondisi	Lintasan pelangi
1.	$\boldsymbol{v_i}$	$\boldsymbol{v_{k,j}}$	$\boldsymbol{i \in [1,3], k = ((i \bmod 3) + 1)}$, $\boldsymbol{j \in [1,n]}$	$\boldsymbol{v_i, v_k, v_{k,j}}$
2.	$\boldsymbol{v_{i,l}}$	$\boldsymbol{v_{k,j}}$	$\boldsymbol{i \in [1,3], k = ((i \bmod 3) + 1)}$, $\boldsymbol{l \in [1,n], j \in [1,n]}$	$\boldsymbol{v_{i,l}, v_k, v_{k,j}}$

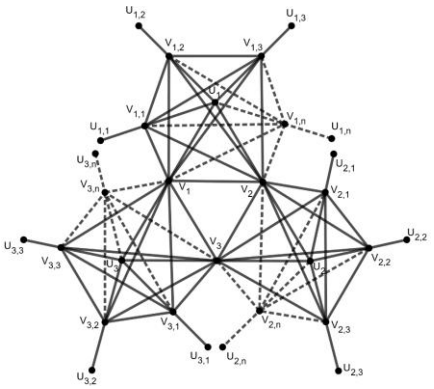
Berdasarkan definisi pewarnaan titik pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 1, maka Teorema 1 yang menyatakan $rvc(L(C_3 \triangleright S_n)) = 1$, dengan $n \geq 3$ terbukti.

Graf Tengah $(\boldsymbol{C_3 \triangleright S_n})$

Definisi 3. Misalkan n bilangan bulat dengan n ≥ 3, (M (C3 ▷ Sn)) adalah graf terbentuk melalui pembentukan graf tengah dari graf hasil operasi comb graf lingkaran C3 dan graf bintang Sn. Maka, graf G dibentuk oleh himpunan titik V (G) dan himpunan sisi E(G) berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_i | i \in [1,3]\} \cup \{u_i | i \in [1,3]\} \cup \{v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\} \cup$
$\{u_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\}$
$E(G) = \{v_i v_j \mid [1 \leq i < j \leq 3]\} \cup \{v_i u_i \mid i \in [1,3]\} \cup$
$\{v_i u_k \mid i \in [1,3], k = ((i + 1 \, mod \, 3) + 1)\} \cup$
$\{v_i v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\} \cup \{u_i v_{i,j} | i \in [1,3], j \in [1,n]\} \cup$
$\{v_i v_{k,j} \mid i \in [1,3], k = ((i + 1 \, mod \, 3) + 1), \; j \in [1,n]\} \cup$
$\{v_{i,j} v_{k,j} | i \in [1,3], [1 \leq j < k \leq 3]\} \cup$
$\{v_{i,j} u_{i,j} | i \in [1,3], \; j \in [1,n]\}$

Berikut merupakan gambar graf tengah dari hasil operasi comb graf lingkaran dan graf bintang $(M \; (C_3 \triangleright S_n))$:



Gambar 4. Graf $\boldsymbol{M(C_3 \triangleright S_n)}$

a) Diameter Graf $M(C_3 \triangleright S_n)$
Dari hasil analisis lintasan diperoleh diameter graf:

$$diam(M(C_3 \triangleright S_n)) = 4$$

b) Bilangan Terhubung Pelangi Graf $M(C_3 \triangleright S_n)$
Teorema 2. Misalkan n merupakan bilangan bulat dengan $n \geq 3$ dan $G \cong L(C_3 \triangleright S_n)$ maka:

$$rvc(M(C_3 \triangleright S_n)) = 3n + 1$$

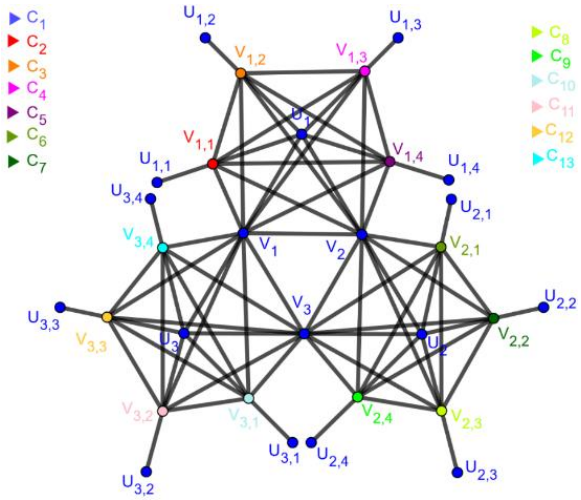
Bukti. Berdasarkan teorema yang tercantum dalam referensi Krivelevich dan Yuster (2009), dinyatakan bahwa $rvc(G) \geq diam(G) - 1$. Jika $rvc(G) = diam(G) - 1$, maka cukup menunjukkan terdapat lintasan Pelangi dengan pewarnaan c : V (G) → $\{1, 2, \ldots, rvc(G)\}$. Jika $rvc(G) \neq diam(G) - 1$ atau $rvc(G) \geq diam(G) - 1$, maka

pembuktian dilakukan dengan metode kontradiksi. Oleh karena itu, pada pembuktian pada teorema 2 ini dilakukan dengan kontradiksi karena $rvc(G) \geq diam(G) - 1$.

Berdasarkan graf pada Gambar 5. Terdapat *pendant* di titik $v_{i,j}$, sehingga untuk membuat graf tersebut terhubung titik pelangi dengan warna paling minimal, maka semua titik $v_{i,j}$ dari graf harus diberi warna berbeda agar lintasan pelangi dapat terpenuhi. Melalui pendekatan kontradiksi ditunjukkan bahwa penggunaan hanya $3n$ warna tidaklah cukup. Maka dibutuhkan minimal $3n + 1$ warna. Dengan demikian:

$$c(v_i) = 1 \mid i \in [1,3]$$
$$c(u_i) = 1 \mid i \in [1,3]$$
$$c(u_{i,j}) = 1 \mid i \in [1,3], j \in [1,n]$$
$$c(v_{i,j}) = 1 + ((i-1)n + j) \mid i \in [1,3], j \in [1,n]$$

Ilustrasi pewarnaan titik pelangi pada graf $M(C_3 \rhd S_n)$ dengan $n \geq 3$ dapat dilihat pada gambar 5.



Gambar 5. Pewarnaan titik pelangi $\boldsymbol{M(C_3 \rhd S_n)}$

Berikut ini adalah tabel lintasan pelangi untuk setiap pasangan $x, y \in G$ dengan pewarnaan c pada graf garis dari graf $M(C_3 \rhd S_n)$.

Tabel 2. Lintasan pelangi graf $\boldsymbol{L(C_3 \rhd S_n)}$

No	x	y	Kondisi	Lintasan pelangi
1.	u_i	u_k	$i \in [1,3], k = ((i \bmod 3) + 1)$	u_i, v_k, u_k
2.	v_i	u_k	$i \in [1,3], k = ((i \bmod 3) + 1)$	v_i, v_k, u_k
3.	v_i	$v_{k,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i \bmod 3) + 1)$	$v_i, v_k, v_{k,j}$
4.	v_i	$u_{i,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n]$	$v_i, v_{i,j}, u_{i,j}$
5.	u_i	$u_{i,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n]$	$u_i, v_{i,j}, u_{i,j}$
6.	u_i	$v_{k,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i \bmod 3) + 1)$	$u_i, v_k, v_{k,j}$
			$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i+1 \bmod 3) + 1)$	$u_i, v_k, v_{k,j}$
7.	v_i	$u_{k,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i+1 \bmod 3) + 1)$	$v_i, v_{k,j}, u_{k,j}$
			$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i \bmod 3) + 1)$	$v_i, v_k, v_{k,j}, u_{k,j}$
8.	u_i	$u_{k,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i \bmod 3) + 1)$	$u_i, v_k, v_{k,j}, u_{k,j}$
			$i \in [1,3], j \in [1,n],$ $k = ((i+1 \bmod 3) + 1)$	$u_i, v_k, v_{k,j}, u_{k,j}$
9.	$u_{i,j}$	$u_{i,k}$	$i \in [1,3], [1 \leq j < k \leq 3]$	$u_{i,j}, v_{i,j}, v_{i,k}, u_{i,k}$
10.	$v_{i,l}$	$v_{k,j}$	$i \in [1,3], j \in [1,n], l \in [1,n],$	$v_{i,l}, v_k, v_{k,j}$

No	x	y	Kondisi	Lintasan pelangi
			$\boldsymbol{k = ((i \bmod 3) + 1)}$	
11.	$\boldsymbol{v_{i,l}}$	$\boldsymbol{u_{k,j}}$	$\boldsymbol{i \in [1,3], j \in [1,n], l \in [1,n],}$ $\boldsymbol{k = ((i \bmod 3) + 1)}$	$\boldsymbol{v_{i,l}, v_k, v_{k,j}, u_{k,j}}$
12.	$\boldsymbol{u_{i,l}}$	$\boldsymbol{u_{k,j}}$	$\boldsymbol{i \in [1,3], j \in [1,n], l \in [1,n],}$ $\boldsymbol{k = ((i \bmod 3) + 1)}$	$\boldsymbol{v_{i,l}, v_{i,l}, v_k, v_{k,j}, u_{k,j}}$

Berdasarkan definisi pewarnaan titik pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 2, maka Teorema 2 yang menyatakan $rvc\big(M(C_3 \rhd S_n)\big) = 3n + 1$, dengan $n \geq 3$ terbukti.

Pembahasan

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pembentukan graf garis dan graf tengah dari hasil operasi comb antara graf lingkaran C_3dan graf bintang $S_n$menghasilkan karakteristik bilangan terhubung titik pelangi yang berbeda. Perbedaan tersebut memperlihatkan bahwa transformasi graf berpengaruh langsung terhadap pola keterhubungan, diameter, dan kebutuhan warna minimum dalam pewarnaan titik pelangi. Secara umum, bilangan terhubung titik pelangi $\mathrm{rvc}\,(G)$ditentukan oleh jumlah minimum warna pada titik-titik graf sehingga setiap pasangan titik dapat dihubungkan oleh lintasan yang titik-titik internalnya memiliki warna berbeda. Konsep ini merupakan pengembangan dari rainbow connection yang diperkenalkan oleh Chartrand et al. (2008) dan diperluas dalam bentuk rainbow vertex connection oleh Krivelevich dan Yuster (2009).

Pada graf garis $L(C_3 \triangleright S_n)$, diperoleh diameter graf sebesar 2. Berdasarkan batas bawah umum $\mathrm{rvc}\,(G) \geq \mathrm{diam}\,(G) - 1$, maka diperoleh $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n)) \geq 1$. Hasil konstruksi pewarnaan menunjukkan bahwa satu warna sudah cukup untuk membuat setiap pasangan titik terhubung melalui lintasan titik pelangi. Dengan demikian, diperoleh $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n)) = 1$. Nilai ini menunjukkan bahwa struktur graf garis dari hasil operasi comb tersebut memiliki tingkat keterhubungan yang relatif kuat. Meskipun graf asal dibentuk dari kombinasi graf lingkaran dan graf bintang, transformasi menjadi graf garis menyebabkan relasi antar sisi pada graf asal berubah menjadi relasi antar titik pada graf baru, sehingga lintasan antar titik menjadi lebih pendek.

Temuan ini sejalan dengan prinsip bahwa graf dengan diameter kecil cenderung membutuhkan lebih sedikit warna untuk memenuhi kondisi rainbow vertex connection. Dalam kasus $L(C_3 \triangleright S_n)$, diameter 2 menyebabkan setiap pasangan titik dapat dihubungkan melalui lintasan yang memiliki paling banyak satu titik internal. Karena hanya ada satu titik internal, pemberian satu warna pada seluruh titik sudah memenuhi syarat lintasan titik pelangi. Hal ini memperkuat pandangan Krivelevich dan Yuster (2009) bahwa diameter graf berperan penting dalam menentukan batas bawah bilangan terhubung titik pelangi. Selain itu, hasil ini juga memperlihatkan bahwa transformasi graf garis dapat menyederhanakan kebutuhan pewarnaan titik pelangi karena graf garis cenderung memperpadat hubungan antar elemen graf asal.

Berbeda dengan graf garis, graf tengah $M(C_3 \triangleright S_n)$memiliki diameter 4 dan menghasilkan nilai $\mathrm{rvc}\,(M(C_3 \triangleright S_n)) = 3n + 1$. Nilai ini jauh lebih besar dibandingkan nilai pada graf garis. Perbedaan tersebut disebabkan oleh struktur graf tengah yang lebih kompleks karena memuat titik-titik dari graf asal sekaligus titik-titik yang merepresentasikan sisi graf asal. Selain itu, keberadaan titik-titik pendant atau titik daun pada bagian $v_{i,j}$menyebabkan lintasan antar pasangan titik tertentu harus melewati titik-titik internal yang berbeda. Akibatnya, titik-titik tertentu harus diberi warna berbeda agar syarat lintasan titik pelangi tetap terpenuhi.

Pembuktian pada graf tengah menunjukkan bahwa penggunaan $3n$warna belum cukup, sehingga diperlukan paling sedikit $3n + 1$warna. Strategi ini menggunakan pendekatan batas bawah dan kontradiksi, yaitu dengan menunjukkan bahwa jika jumlah warna lebih sedikit digunakan, maka terdapat pasangan titik yang tidak dapat dihubungkan oleh lintasan dengan titik internal berwarna berbeda. Pendekatan semacam ini banyak digunakan dalam penelitian bilangan terhubung titik pelangi, terutama ketika struktur graf memiliki banyak titik penghubung atau cabang yang menimbulkan kebutuhan warna berbeda pada lintasan tertentu. Hasil ini konsisten dengan penelitian Akadji et al. (2019), Taha et al. (2021), dan

Lihawa et al. (2022) yang menunjukkan bahwa perubahan struktur graf melalui amalgamasi, graf bunga, dan operasi korona dapat meningkatkan kompleksitas pewarnaan titik pelangi.

Jika dibandingkan dengan penelitian Yahya et al. (2023) mengenai rainbow vertex-connection number pada operasi comb graf siklus dan graf bipartit lengkap, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa operasi comb dapat menghasilkan pola bilangan terhubung titik pelangi yang sangat bergantung pada graf penyusun dan bentuk transformasi lanjutannya. Pada penelitian ini, graf asal yang dibangun dari C_3dan $S_n$menghasilkan dua perilaku berbeda setelah ditransformasikan menjadi graf garis dan graf tengah. Graf garis menghasilkan nilai minimum yang konstan, yaitu 1, sedangkan graf tengah menghasilkan nilai yang bergantung pada n, yaitu $3n + 1$. Perbedaan ini menunjukkan bahwa operasi comb saja belum cukup untuk menentukan kecenderungan nilai $\mathrm{rvc}\,(G)$; transformasi graf setelah operasi juga sangat menentukan.

Hasil ini juga dapat dikaitkan dengan temuan Annadhifi et al. (2024a), yang menegaskan bahwa nilai rainbow vertex connection number pada graf khusus, seperti bull graph, net graph, triangular ladder graph, dan composition graph, dipengaruhi oleh struktur lokal, posisi titik penghubung, dan pola lintasan internal. Dalam konteks penelitian ini, titik-titik pada graf tengah memiliki peran struktural yang lebih kompleks dibandingkan titik-titik pada graf garis. Oleh karena itu, kebutuhan warna pada graf tengah meningkat secara linear terhadap n. Hal ini menunjukkan bahwa semakin banyak cabang yang berasal dari graf bintang S_n, semakin banyak pula titik yang harus dibedakan warnanya untuk mempertahankan sifat lintasan titik pelangi.

Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan kajian bilangan terhubung titik pelangi pada graf hasil operasi dan graf hasil transformasi. Nilai $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n)) = 1$menunjukkan bahwa graf garis dari hasil operasi comb memiliki struktur yang cukup terhubung sehingga hanya memerlukan satu warna. Sebaliknya, nilai $\mathrm{rvc}\,(M(C_3 \triangleright S_n)) = 3n + 1$menunjukkan bahwa graf tengah memiliki kompleksitas lintasan yang lebih tinggi dan membutuhkan pewarnaan lebih besar. Temuan ini memperkuat bahwa parameter rainbow vertex connection tidak hanya dipengaruhi oleh ukuran graf, tetapi juga oleh diameter, titik pendant, pola insidensi, dan transformasi struktural graf.

KESIMPULAN

Penelitian ini telah menentukan bilangan terhubung titik pelangi pada graf garis dan graf tengah yang dibentuk dari hasil operasi comb antara graf lingkaran C_3dan graf bintang S_n, dengan $n \geq 3$. Penentuan nilai tersebut dilakukan melalui analisis struktur graf, penentuan diameter, konstruksi fungsi pewarnaan titik, serta verifikasi lintasan titik pelangi untuk setiap pasangan titik yang relevan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa transformasi graf hasil operasi comb ke dalam bentuk graf garis dan graf tengah menghasilkan karakteristik keterhubungan titik pelangi yang berbeda.

Pada graf garis $L(C_3 \triangleright S_n)$, diperoleh diameter graf sebesar 2. Berdasarkan batas bawah bilangan terhubung titik pelangi, yaitu $\mathrm{rvc}\,(G) \geq \mathrm{diam}\,(G) - 1$, diperoleh bahwa $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n)) \geq 1$. Selanjutnya, melalui konstruksi pewarnaan titik dengan satu warna dan pembuktian lintasan pelangi untuk setiap pasangan titik, terbukti bahwa satu warna sudah cukup untuk memenuhi syarat keterhubungan titik pelangi. Dengan demikian, diperoleh $\mathrm{rvc}\,(L(C_3 \triangleright S_n)) = 1$. Hasil ini menunjukkan bahwa graf garis dari hasil operasi comb C_3dan $S_n$memiliki struktur keterhubungan yang relatif kuat, sehingga setiap pasangan titik dapat dihubungkan melalui lintasan yang titik-titik internalnya tetap memenuhi kondisi pelangi meskipun hanya digunakan satu warna.

Sementara itu, pada graf tengah $M(C_3 \triangleright S_n)$, diperoleh diameter graf sebesar 4. Berbeda dengan graf garis, struktur graf tengah lebih kompleks karena memuat titik-titik dari graf asal sekaligus titik-titik yang merepresentasikan sisi-sisi graf asal. Keberadaan titik-titik pendant dan pola insidensi pada graf tengah menyebabkan kebutuhan warna meningkat. Melalui pembuktian batas bawah dan konstruksi fungsi pewarnaan titik, diperoleh bahwa setiap titik $v_{i,j}$memerlukan warna berbeda, sedangkan titik-titik lain dapat diberi warna yang sama tanpa melanggar syarat lintasan titik pelangi. Oleh karena itu, diperoleh $\mathrm{rvc}\,(M(C_3 \triangleright S_n)) = 3n + 1$.

Perbedaan nilai bilangan terhubung titik pelangi pada kedua graf tersebut menunjukkan bahwa transformasi graf memiliki pengaruh penting terhadap struktur lintasan dan kebutuhan warna minimum. Graf garis menghasilkan nilai konstan, sedangkan graf tengah menghasilkan nilai yang bergantung pada parameter n. Dengan demikian, penelitian ini memperlihatkan bahwa bilangan terhubung titik pelangi tidak hanya dipengaruhi oleh ukuran graf, tetapi juga oleh diameter, keberadaan titik pendant, pola ketetanggaan, dan bentuk transformasi graf yang digunakan.

Penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan kajian pewarnaan pelangi, khususnya pada bilangan terhubung titik pelangi untuk graf hasil operasi dan graf hasil transformasi. Untuk penelitian selanjutnya, kajian dapat diperluas pada jenis graf lain, seperti graf kuadratik, graf persegi, graf lintasan, graf roda, atau graf hasil operasi lainnya. Selain itu, penelitian lanjutan juga dapat mengkaji hubungan antara bilangan terhubung titik pelangi dengan parameter graf lain, seperti bilangan dominasi, bilangan kromatik, pelabelan total, pelabelan sisi, atau parameter metrik graf, sehingga diperoleh pemahaman yang lebih menyeluruh mengenai pengaruh struktur graf terhadap sifat pewarnaan pelangi.

REKOMENDASI

Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas kajian bilangan terhubung titik pelangi pada graf hasil operasi lain, tidak hanya pada operasi comb antara graf lingkaran C_3dan graf bintang S_n. Kajian dapat dikembangkan pada operasi graf lain, seperti operasi korona, amalgamasi, kartesian, join, shackling, atau operasi subdivisi, sehingga dapat diketahui bagaimana perubahan struktur graf memengaruhi nilai $\mathrm{rvc}\,(G)$. Selain itu, penelitian lanjutan juga dapat mempertimbangkan graf dasar yang lebih beragam, misalnya graf lintasan, graf roda, graf kipas, graf buku, graf kuadratik, graf persegi, graf lengkap, atau graf bipartit lengkap. Selain memperluas jenis graf, penelitian berikutnya juga dapat mengkaji graf garis dan graf tengah dari hasil operasi comb dengan parameter yang lebih umum, misalnya $C_m \triangleright S_n$, $P_m \triangleright S_n$, atau $C_m \triangleright K_{p,q}$. Generalisasi ini penting untuk melihat apakah pola nilai bilangan terhubung titik pelangi yang diperoleh pada $L(C_3 \triangleright S_n)$dan $M(C_3 \triangleright S_n)$tetap berlaku, berubah secara linear, atau membentuk pola baru ketika ukuran graf penyusun diperbesar.

Penelitian mendatang juga disarankan untuk membandingkan bilangan terhubung titik pelangi dengan parameter graf lainnya, seperti diameter, bilangan kromatik, bilangan dominasi, bilangan konektivitas, pelabelan sisi, pelabelan total, dan dimensi metrik. Perbandingan ini dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai hubungan antara struktur graf dan kebutuhan warna minimum dalam pewarnaan titik pelangi. Dengan demikian, kajian bilangan terhubung titik pelangi tidak hanya menghasilkan nilai eksak suatu graf, tetapi juga dapat memperlihatkan pola umum yang berguna bagi pengembangan teori graf. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat menggunakan pendekatan komputasional untuk memverifikasi hasil teoretis pada graf berukuran lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurahman, M., Helmi, H., & Fran, F. (2024). Bilangan Kromatik Permainan Graf Ubur-Ubur, Graf Siput, dan Graf Gurita. Jambura Journal of Mathematics, 6(1). https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.23958

Akadji, A. F., Taha, D., Lakisa, N., dan Yahya, N. I. 2019. Bilangan terhubung titik pelangi pada amalgamasi graf berlian. Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi, 7(2):56–61. doi:10.34312/euler.v7i2.10345

Annadhifi, M. I. N., Adawiyah, R., Dafik, D., & Suparta, I. N. (2024a). Rainbow Vertex Connection Number Of Bull Graph, Net Graph, Triangular Ladder Graph, And Composition Graph (P_n [P_1]). Barekeng Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan, 18(3), 1665–1672. https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss3pp1665-1672

Arizmendi, O., Hasebe, T., & Lehner, F. (2024). Cyclic independence: Boolean and monotone. Algebraic Combinatorics, 6(6), 1697–1734. https://doi.org/10.5802/alco.309

Babiński, S., Grzesik, A., & Prorok, M. (2025). Directed Graphs Without Rainbow Triangles. Journal of Graph Theory, 109(3), 269–281. https://doi.org/10.1002/jgt.23224

Batiha, I. M., Anakira, N., Hashim, A. Y. B., & Mohamed, B. (2024). A special graph for the connected metric dimension of graphs. Mathematical Models in Engineering, 10(3), 193–201. https://doi.org/10.21595/mme.2024.24176

Borzechowski, M., & Weber, S. (2025). On Flipping Edge Sets in Unique Sink Orientations. Graphs and Combinatorics, 41(3). https://doi.org/10.1007/s00373-025-02929-2

Bowtell, C., Morris, P., Pehova, Y., & Staden, K. (2025). Universality for transversal Hamilton cycles. Bulletin of the London Mathematical Society, 57(3), 711–729. https://doi.org/10.1112/blms.13223

Cairncross, E., Mizgerd, C., & Mubayi, D. (2025). Inducibility of rainbow graphs. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 180(1), 191–218. https://doi.org/10.1017/s0305004125101692

Chartrand, G., Johns, G., McKeon, K., & Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. Mathematica Bohemica, 133(1):85–98.

Dai, T., & Kelly, T. (2025). On the existence of reflecting n-queens configurations. Forum of Mathematics Sigma, 13. https://doi.org/10.1017/fms.2025.10097

Darmadi, D., & Fathurrahman, F. (2025). Identification of Phenotypic Nature of Rainbow Corn (Zea mays L.) Due to Colchicine Treatment. Iop Conference Series Earth and Environmental Science, 1478(1), 012002. https://doi.org/10.1088/1755-1315/1478/1/012002

Darmajid, D., Hidayat, N., Wicaksono, W. B., & Musyarrofah, A. F. (2024). Indeks Wiener dari Graf Identitas dan Graf Pangkat pada Grup Siklis Berhingga. Syntax Literate Jurnal Ilmiah Indonesia, 9(7), 3848–3855. https://doi.org/10.36418/syntax-literate.v9i7.16994

Gupta, C. (2025). Efficient Isolation of Perfect Matching in O(log n) Genus Bipartite Graphs. https://doi.org/10.48550/arxiv.2511.21217

Hadiputra, F. F., & Maryati, T. K. (2024). A note on local edge antimagic chromatic number of graphs. Proyecciones (Antofagasta), 43(2), 447–458. https://doi.org/10.22199/issn.0717-6279-6014

Imran, M., Cancan, M., Nadeem, M. F., & Ali, Y. (2024). Further results on edge irregularity strength of some graphs. Proyecciones (Antofagasta), 43(1), 133–151. https://doi.org/10.22199/issn.0717-6279-6175

Kristiana, A. I., & Saputra, G. (2024). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Pensil. Jurnal Axioma Jurnal Matematika Dan Pembelajaran, 9(1), 97–105. https://doi.org/10.56013/axi.v9i1.2492

Krivelevich, M. dan Yuster, R. 2009. The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. Journal of Graph Theory, 63(3):185–191. doi:10.1002/jgt.20418.

Kusuma, Y. J. dan Prasetyo, D. A. B. 2020. Pelabelan total tak-ajaib sisi pada multistar. EPSILON: JURNAL MATEMATIKA MURNI DAN TERAPAN, 14(2):62–70.

Li, X. (2025). Constrained Ramsey numbers for rainbow P_5. https://doi.org/10.48550/arxiv.2510.18243

Lihawa, I., Ismail, S., Hasan, I. K., Yahya, L., Nasib, S. K., dan Yahya, N. I. 2022. Bilangan terhubung titik pelangi pada graf hasil operasi korona graf prisma (pm,2) dan graf lintasan (p3). Jambura Journal of Mathematics, 4(1):145–151. doi:10.34312/jjom.v4i1.11826.

Listiyaningrum, O. (2025). Graph Coloring Application with Modified Tabu Search Algorithm in School Scheduling. 27, 854–865. https://doi.org/10.4028/p-zdxab3

Nuryatma, N. (2024). Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Optimalisasi Distribusi Beras di Badan Usaha Logistik (BULOG) Kota Samarinda. Basis Jurnal Ilmiah Matematika, 3(1), 38–53. https://doi.org/10.30872/basis.v3i1.1135

Taha, D., Nurwan, N., Nasib, S. K., dan Yahya, N. Y. 2021. Titik bunga dan oleander. UNNES Journal of Mathematics, 10:1–6.

Thamizhendhi, E. al. G. (2024). Some Results on Odd-Even Congruence Labeling of Graphs. Cana, 31(1), 141–149. https://doi.org/10.52783/cana.v31.369

Tonis, M., Zaky, A., Bisra, M., & Suryandartiwi, W. (2025). Perancangan Aplikasi Penjadwalan Praktek Dokter di Rumah Sakit Menggunakan Metode Pewarnaan Graf. Journal of Health, 11(2), 182–189. https://doi.org/10.30590/joh.v11n2.845

Umilasari, R. dan Darmaji. 2015. Bilangan dominasi jarak dua pada graf-graf hasil operasi korona dan comb. justindo, 2(1).

Wang, F., & Hsu, C.-J. (2024). Rainbow Connection Numbers of WK-Recursive Networks and WK-Recursive Pyramids. Mathematics, 12(7), 944. https://doi.org/10.3390/math12070944

Wang, L., Liu, S., & Jiang, H. (2024). Rainbow connections of bioriented graphs. Heliyon, 10(10), e31426. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e31426

Yahya, N. I., Fatmawati, A., Nurwan, N., dan Nasib, S. K. 2023. Rainbow Vertex-Connection Number on Comb Product Operation of Cycle Graph (C_4) and Complete Bipartite Graph (K_3,N). BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 17(2):0673–0684. doi:10.30598/barekengvol17iss2pp0673-0684.

Yusak, M. Y., Putri, D. F., & Syaripuddin, S. (2024). Penerapan Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch-Powell pada Penjadwalan Mata Pelajaran. Journal of Mathematics Education and Science, 7(2), 177–183. https://doi.org/10.32665/james.v7i2.2272