Argumen Deduktif Mahasiswa dalam Mengonstruksi Bukti

[1]Deni Hamdani, [2]Sri Subarinah
[1,2]Prodi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, Indonesia 83115

Email Korespondensi: deni.math@unram.ac.id

Article Info

Article History
Received: 2020-11-01
Revised: 2020-12-29
Published: 2020-12-31

Keywords
Deductive argument; proof technique; scheme of argumentation

Abstract

***Students' Deductive Arguments in Constructing Evidence**. Proof is a logical argument that is given according to the rules of the deductive system, and is used as a justification for the statement of a theorem, and is a fundamental part of the mathematical thinking process, in other words, proof is a deductive argument. Studying proving is learning new ideas, concepts and strategies. The entire arsenal of methodology and mathematical knowledge is embedded in the evidence. The need to understand, especially writing proof is very important, therefore this study aims to describe students' deductive arguments in constructing evidence using several proving techniques. This research was conducted qualitatively, with a picture of the student's deductive arguments taken by analyzing the proving results of 35 students and obtained 4 students using direct proof techniques and the remaining 31 people using mathematical induction techniques. This result is due to: 1) the initial / introductory discussion of the course has not discussed direct and indirect proof techniques, 2) the emphasis of both techniques (direct and indirect proof) on the basic subject of analysis is not optimal, 3) there are no courses specifics related to the proving technique. So it concludes that students' deductive arguments in constructing proof are still not associated so that it is necessary to introduce first the types of proof techniques such as direct proof, indirect proof (contrapositive and contradictory), and then mathematical induction techniques. This is important, so that students can learn new ideas, new concepts, new strategies that can be assimilated into further development research.*

Informasi Artikel

Sejarah Artikel
Diterima: 01-11-2020
Direvisi: 29-12-2020
Dipublikasi: 31-12-2020

Kata kunci
Argumen deduktif; teknik pembuktian; Skema Argumentasi

Abstrak

Bukti adalah argumen logis yang diberikan sesuai dengan aturan sistem deduktif, dan digunakan sebagai pembenaran pernyataan suatu teorema, serta merupakan bagian fundamental dari proses berpikir matematis, dengan kata lain bukti adalah argumen deduktif. Mempelajari bukti adalah mempelajari ide-ide, konsep, dan strategi baru. Seluruh gudang metodologi dan pengetahuan matematika tertanam dalam bukti. Kebutuhan untuk memahami, terutama menulis bukti sangatlah penting, karena itu penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan argumen deduktif mahasiswa dalam mengonstruksi bukti menggunakan beberapa teknik pembuktian. Penelitian ini dijalankan secara kualitatif, dengan gambaran argumen deduktif mahasiswa diambil dengan menganalisis hasil pembuktian 35 orang mahasiswa dan diperoleh 4 orang mahasiswa menggunakan teknik bukti langsung dan sisanya 31 orang menggunakan teknik induksi matematika. Hasil ini disebabkan karena: 1) bahasan awal/pengantar mata kuliah belum membahas teknik bukti langsung dan bukti tak-langsung, 2) penekanan kedua teknik (bukti langsung dan tak-langsung) pada mata dasar analisis belum optimal, 3) belum ada mata kuliah spesifik terkait dengan teknik pembuktian. Sehingga menyimpulkan bahwa argumen deduktif mahasiswa dalam mengonstruksi bukti masih belum terasosiasi sehingga perlu diperkenalkan terlebih dahulu jenis-jenis teknik pembuktian seperti bukti langsung, bukti tak-langsung (kontrapositif dan kontradiksi), dan kemudian teknik induksi matematika. Hal ini penting, agar mahasiswa dapat mempelajari ide-ide baru, konsep baru, strategi baru yang dapat diasimilasi ke dalam penelitian pengembangan lebih lanjut.

Sitasi : Hamdani D., & Subarinah S. (2020) Argumen deduktif Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Bukti. The 2th National Conference on Education, Social Science, and Humaniora Proceeding. 2 (1). 21-32.

PENDAHULUAN

Bukti adalah argumen logis yang diberikan sesuai dengan aturan sistem deduktif, dan digunakan sebagai pembenaran pernyataan suatu teorema, serta merupakan bagian fundamental dari proses berpikir matematis (Devlin, 2003; Koshy, 2007; Dumas & McCarthy, 2015; Wikipedia contributors, 2020). Sebagai bentuk argumen, bukti haruslah meyakinkan (Hanna, 1990). Lebih lanjut, Weber (2008) dan Balacheff (2017) mengatakan bahwa argumen dapat dilihat sebagai bukti yang valid, dan argumen yang dikatakan valid adalah argumen yang bentuknya valid (Purwanto, 2015). Atas beberapa definisi bukti ini, dapat kita katakan bahwa bukti adalah argumen deduktif yang harus valid dan menyakinkan.
Mempelajari bukti adalah mempelajari ide-ide baru, konsep baru, strategi baru yang dapat diasimilasi ke dalam pengembangan penelitian lebih lanjut (Rav, 1999).

Semua bukti dan argumen matematis harus didasarkan pada suatu pernyataan, yang merupakan kalimat deklaratif atau rangkaian simbol yang bermakna yang dapat diklasifikasikan sebagai benar atau salah, tetapi tidak keduanya (Bartle & Sherbert, 2011). Kemampuan dalam menggunakan metode-metode pembuktian, aksioma, definisi, lemma, dan teorema untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan dalam matematika merupakan bagian dari proses konstruksi bukti (Selden & Selden, 2003). Seluruh gudang metodologi matematika, konsep, strategi dan teknik untuk memecahkan masalah, pembentukan interkoneksi antar teori, sistematisasi hasil, dan seluruh pengetahuan matematika tertanam dalam bukti (Rav, 1999), menulis bukti (pembuktian) merupakan salah satu tujuan utama dalam studi matematika lanjut di universitas (Weber, 2001).
Kebutuhan untuk memahami dan terutama menulis bukti dalam kuliah-kuliah matematika sangatlah penting (Morash, 1987). Pembuktian bertujuan untuk membantu dalam memutuskan apakah dan mengapa jawaban kita logis, mengembangkan kebiasaan memberi argumen, dan menjadikan kegiatan menyelidiki sebagai bagian utuh dari setiap pemecahan dan merupakan proses yang dapat meningkatkan pemahaman konsep (NCTM, 2000; Van de Walle et al., 2012). Sementara Weber, (2003) menyatakan bahwa tujuan dari pembuktian adalah untuk: (1) menjelaskan, (2) sistemisasi, (3) komunikasi, (4) penemuan hasil baru, (5) pertimbangan suatu definisi, (6) mengembangkan intuisi, dan (7) menyediakan otonomi.

Terlepas dari tujuan-tujuan tersebut, kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam menulis atau mengonstruksi bukti hampir ditemui pada semua mata kuliah yang menuntut kemampuan melakukan pembuktian (argumen deduktif). Banyak studi menunjukkan bahwa menulis bukti tetap menjadi kesulitan yang terus-menerus (Alcock & Weber, 2010;Netti et al., 2017), bahkan diakui secara internasional (Miyazaki et al., 2017). Selanjutnya berdasarkan hasil observasi terhadap tugas-tugas mahasiswa dan aktivitas diskusi mahasiswa-dosen secara daring (memuat aktivitas memecahkan dan membuktikan masalah teori bilangan), kami melihat dan menemukan bahwa kesulitan mahasiswa dalam menulis bukti, oleh karena: (1) pemberian contoh pada definisi juga berlaku pada teorema dan lemma, (2) kualitas pemahaman terhadap definisi dan teorema-lemma yang terbukti sebelumnya masih lemah, (3) cara pandang terhadap teorema baru yang dibangun atas definisi, dan teorema-lemma sebelumnya masih minim, dan (4) pengetahuan tentang mana teorema yang penting dan kapan teorema itu harus digunakan.

Beberapa kesulitan ini telah memperlihatkan bahwa kualitas argumentasi mahasiswa dalam membuktikan masalah matematis jelas dipengaruhi oleh tingkat pemahaman mahasiswa dalam menggunakan definisi, lemma, dan teorema-teorema sebelumnya sebagai pembangun atau material ide untuk membuktikan masalah baru ataupun masalah lainnya. Salah satu mata kuliah yang menuntut kemampuan mengonstruksi bukti adalah Teori Bilangan. Teori bilangan merupakan studi tentang sifat-sifat bilangan, di mana “bilangan” yang dimaksud adalah bilangan bulat dan, lebih khusus, bilangan bulat positif. Karakteristik yang menarik dari teori bilangan adalah meskipun banyak dari hasilnya dapat dinyatakan dalam istilah sederhana dan elegan, buktinya kadang-kadang panjang dan rumit (Koshy, 2007; Rosen, 2011). Salah satu sub-bab dalam bahasan teori bilangan yang cukup menjadi pusat/penghubung/landasan berpikir terhadap materi-materi selanjutnya adalah sub-bab keterbagian. Konsep keterbagian bilangan bulat adalah inti dalam teori bilangan (Rosen, 2011).

Sehingga dapat dipastikan bahwa konsep keterbagian bilangan bulat memiliki hubungan yang erat dengan konsep-konsep dalam teori bilangan lainnya, atau dengan kata lain konsep keterbagian dapat menjadi pembangun bagi konsep lainnya. Dengan demikian, makalah ini akan mencoba untuk menggambarkan beberapa bentuk kemampuan mahasiswa dalam menggunakan metode-metode pembuktian, aksioma, definisi, lemma, dan teorema untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan matematis atau dengan kata lain argumentasi mahasiswa dalam mengonstruksi bukti yang berkaitan dengan konsep keterbagian bilangan bulat.

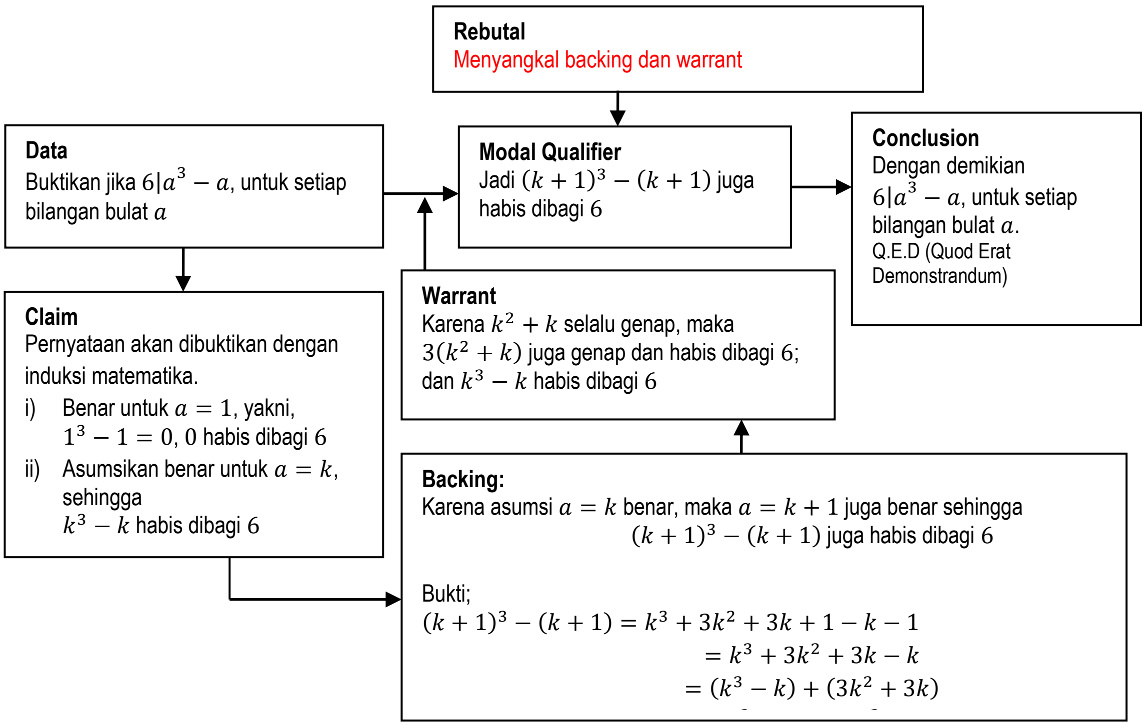
Kemudian, kemampuan argumentasi mahasiswa dalam mengonstruksi bukti ini akan direpresentasikan dalam bentuk skema argumentasi atau skema berpikir. Skema yang dimaksud disini merujuk kepada skema argumentasi seperti yang disampaikan oleh Toulmin (Toulmin, 2003; Aberdein, 2005;Aberdein, 2009; Simpson, 2015,). Skema ini terdiri dari enam komponen, yakni *Data* (disingkat "D", bukti yang menjadi dasar klaim), *Qualifier* (disingkat "Q", tingkat kepercayaan dalam klaim), *Conclusions* (disingkat "C", klaim yang diajukan pengaju/subjek), *Rebuttal* (disingkat "R", keadaan dimana klaim mungkin tidak berlaku), *Warrant* (disingkat "W", justifikasi untuk menarik kesimpulan berdasarkan data), dan *Backing* (disingkat "B", jaminan lain, yang tanpanya warrant itu sendiri tidak akan memiliki (otoritas) atau nilai.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang bertujuan untuk mendeskripsikan kebervariasian dari argumen deduktif mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dari pernyataan berikut.

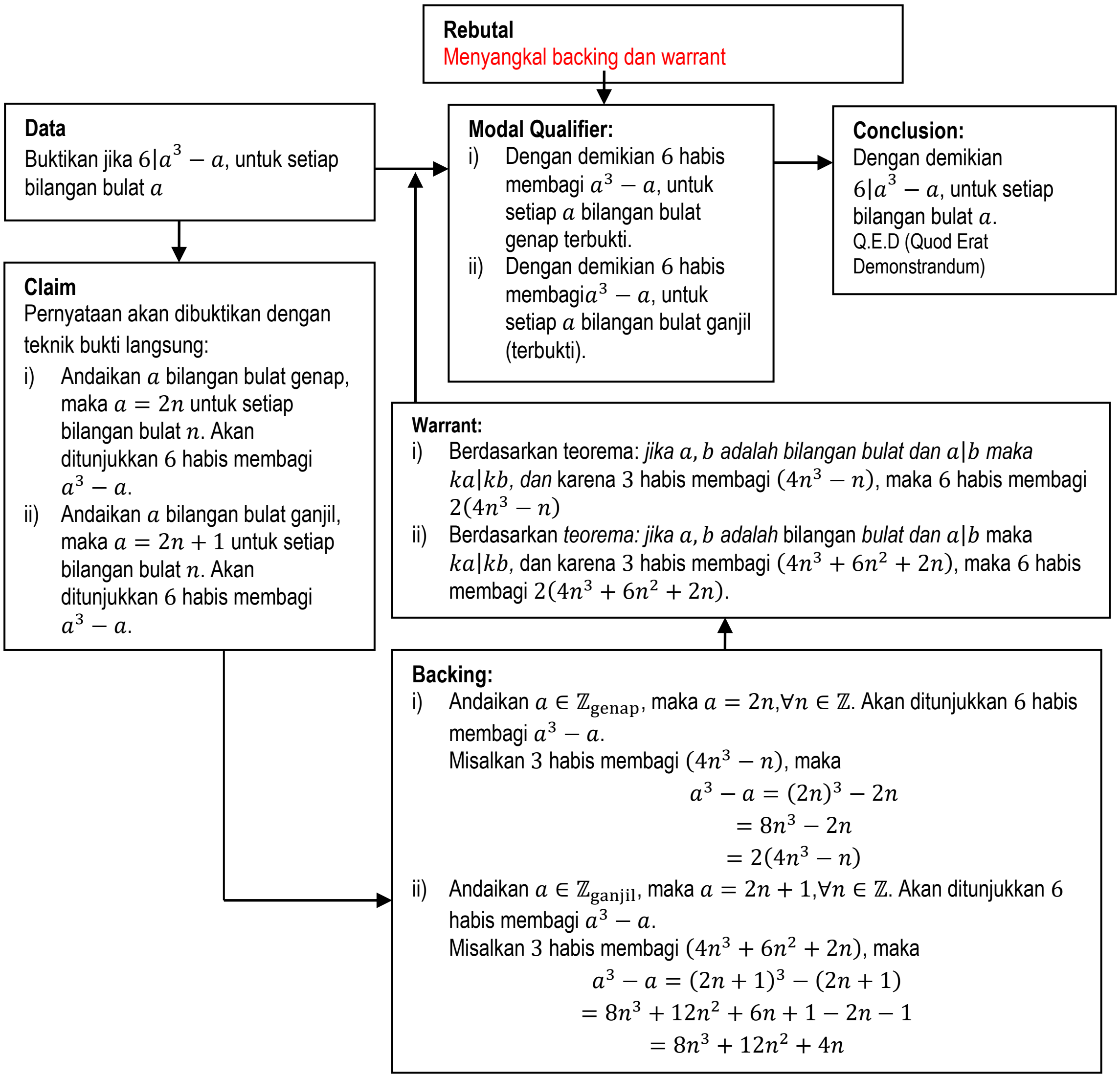
Buktikan jika $6|a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a

Subjek dalam penelitian ini terdiri dari 35 orang mahasiswa semester III yang memprogramkan mata kuliah teori bilangan pada program studi S1 Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Mataram. Argumentasi mahasiswa dalam mengonstruksi pernyataan di atas akan dianalisis melalui lembar jawaban pembuktian, menggunakan skema argumentasi Toulmin, seperti skema berikut.



Gambar 1. Skema argumentasi menggunakan teknik Induksi Matematika

Skema argumentasi pada gambar 1 di atas berdasarkan penggunaan teknik induksi matematik. Selanjutnya karena soal pembuktian dari pernyataan matematis di atas adalah soal tentang keterbagian bilangan bulat, maka dimungkinkan bagi mahasiswa untuk menggunakan teknik bukti langsung (direct proof), seperti yang digambarkan pada skema argumentasi berikut.



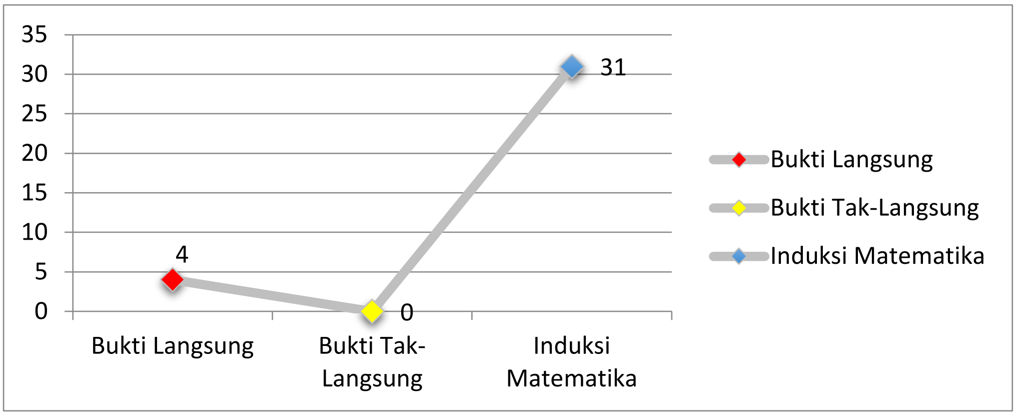
Gambar 2. Skema argumentasi menggunakan teknik bukti langsung

Pada dasarnya 2 bentuk skema ini dirancang untuk menganalisis dan menggambarkan proses yang dilakukan ketika seseorang berusaha meyakinkan orang lain bahwa argumennya itu benar, dan menggambarkan proses dalam skema ini harus berdasarkan langkah yang logis (Toulmin, 2003; Aberdein, 2005, 2009; Simpson, 2015).

Selanjutnya untuk menelusuri argumen deduktif mahasiswa dalam mengonstruksi bukti, akan dilakukan wawancara dan dokumentasi untuk mengkonfirmasi lembar jawaban pembuktian yang telah ditulis atau dikonstruksi, selain untuk mengkonfirmasi argument deduktif mahasiswa saat mengonstruksi bukti, wawancara dan dokumentasi dan dijadikan sebagai data pendukung untuk menginterpretasikan argument mahasiswa dalam mengonstruksi bukti. Wawancara didasarkan atas respon yang diberikan oleh subjek mahasiswa. Proses wawancara akan direkam dengan alat perekam yang bersifat rahasia (subjek tidak mengetahui bahwa sedang direkam), data rekaman selanjutnya akan dibuatkan transkrip pembicaraan untuk mendukung interpretasi atau pencocokan data tertulis atas lembar jawaban pembuktian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil analisis argumentasi mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dari permasalahan yang diajukan, diperoleh bahwa dari 35 orang mahasiswa ada sebanyak 4 orang mahasiswa menggunakan teknik bukti langsung, dan sisanya 31 orang menggunakan teknik induksi matematika. Dua jenis teknik pembuktian yang dominan digunakan dalam mengonstruksi bukti, berikut ini akan disajikan dalam bentuk gambar grafik.



Gambar 3. Grafik variasi teknik bukti yang digunakan

Grafik variasi teknik bukti yang digunakan di atas, mengindikasikan bahwa mahasiswa masih belum mengenal teknik bukti langsung dan tak langsung, dan cukup familiar dengan teknik induksi matematika. Hal ini disebabkan oleh karena: 1) dalam bahasan awal/pengantar mata kuliah teori bilangan tidak membahas tentang teknik bukti langsung dan bukti tak-langsung, 2) penekanan pada capaian pembelajaran tentang kedua teknik (bukti langsung dan tak-langsung) belum optimal, terutama pada mata kuliah kalkulus dan logika dan himpunan, 3) belum ada mata kuliah yang spesifik terkait dengan teknik menulis bukti atau teknik melakukan pembuktian.

Dari masing-masing variasi teknik bukti yang digunakan, selanjutnya akan diambil 2 (dua) orang subjek yang dianggap dapat mewakili masing-masing teknik bukti. Sehingga dalam uraian berikut ini akan ada 4 (empat) subjek yang akan menjadi perwakilan dari 35 subjek, yakni Atiqa Firdaus (AFD), Baiq Aminatuzzuhro (AMZ), Widiami Sayidah (WSD), dan Baiq Oktavia Nurjanah (ONJ).

a. Subjek AFD

Subjek AFD adalah subjek pertama yang mewakili 4 subjek yang mengonstruksi bukti dengan teknik bukti langsung. Berikut ini adalah lembar jawaban dari subjek AFD.

Buktikan jika $6 | a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a

Penyelesaian :

Teorema 3 : $a|b$, $a|c$, maka $a|b-c$

$6|a^3-a$, $6|a \to 6|a^3-a$

$6|a \to$ terdapat m bilangan bulat

$a = 6m$

Substitusikan

$a^3 - a = (6m)^3 - 6m$

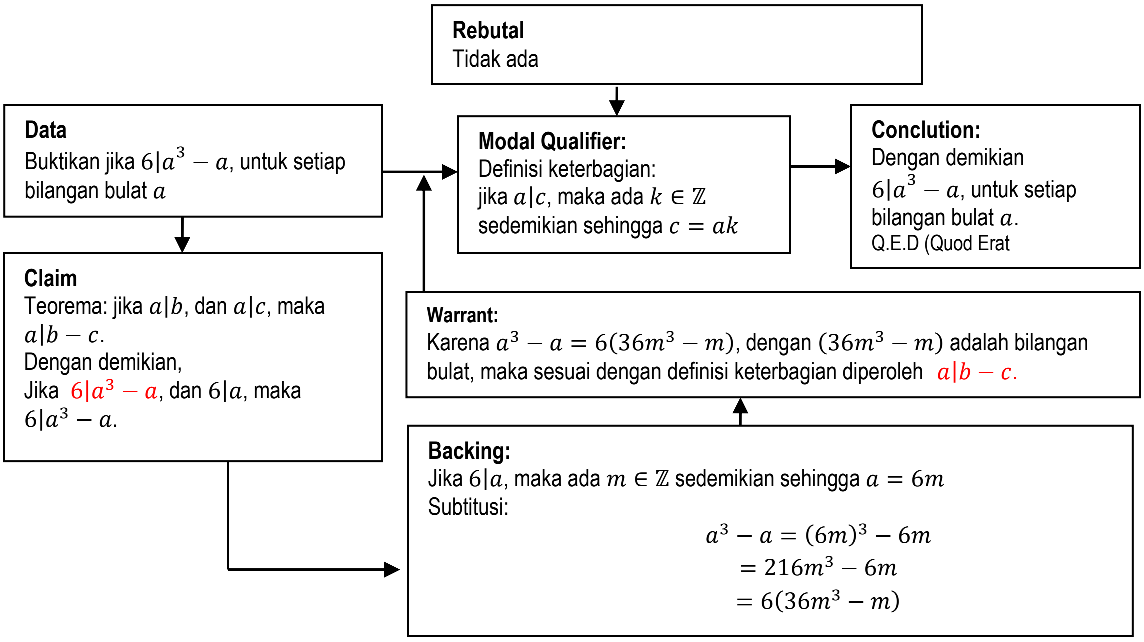
$= 216m^3 - 6m$

$= 6(36m^2 - m)$

Karena $a^3 - a = 6(36m^2 - m)$, dengan $36m^2 - m$ adalah bilangan bulat. Sehingga sesuai definisi diperoleh $a|b-c$

Gambar 4. Lembar Jawaban Pembuktian subjek AFD

Kemudian, jika lembar jawaban pembuktian dari subjek AFD pada gambar 4 di atas digambarkan kembali ke dalam bentuk skema argumen, maka gambaran argumen deduktif yang dilakukan oleh AFD dalam mengonstruksi bukti dari masalah pembuktian yang diberikan sebagai berikut:



Gambar 5. Skema argumen menggunakan teknik bukti langsung subjek AFD

Berdasarkan lembar jawaban dan struktur dalam skema argumen, tampak terlihat bahwa subjek AFD menulis kesalahan dalam menganalogikan premis dari teorema, yakni $6|a^3 - a$ yang seharusnya $6|a^3$ (struktur Claim), dan menulis kesalahan ketika menyimpulkan $a|b - c$ yang seharusnya $6|a^3 - a$ (struktur Warrant). Kesalahan dan ketidaknampakan struktur argumen dalam mengonstruksi bukti ini akan ditelusuri kembali melalui wawancara dan dokumentasi, seperti tampak pada transkrip percakapan berikut.

Tabel 1. Transkrip wawancara Subjek AFD

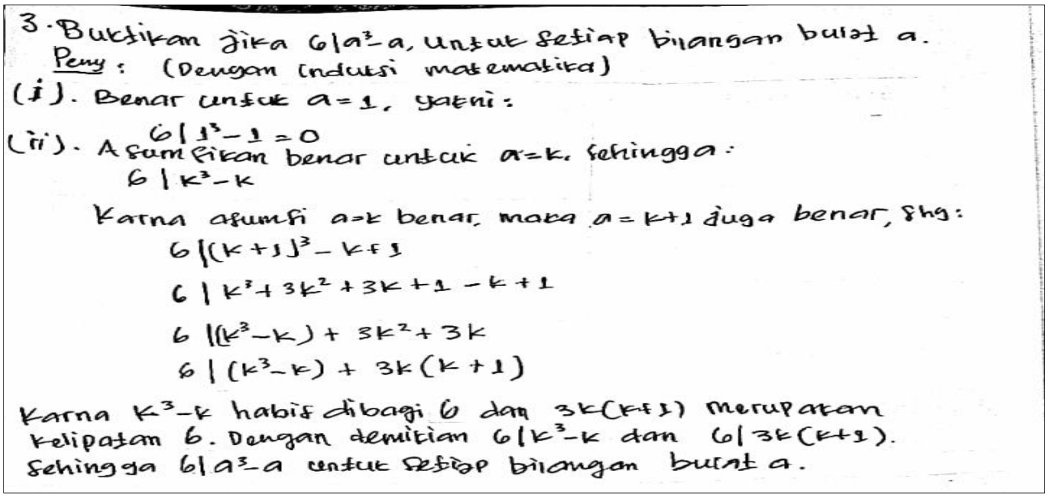
Peneliti/ Subjek		**Stimulus atau respon**
Peneliti	:	Apa yang anda ketahui dan pahami dari masalah: *Buktikan jika $6|a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a*
AFD	:	Kita diminta untuk menunjukkan bahwa $6|a^3 - a$, *untuk setiap bilangan bulat a*
Peneliti	:	Pengetahuan atau pemahaman apa yang diperlukan untuk membuktikan masalah ini?
AFD	:	Pertama kita harus memahami definisi keterbagian bilangan bulat, dan Kedua, kita harus memahami teorema "jika $a|b$, dan $a|c$, maka $a|b - c$."
Peneliti	:	Bagaimana anda mengonstruksi bukti dari masalah ini berdasarkan pemahaman terhadap definisi dan teorema yang anda pahami.
AFD	:	Enggih bapak. Buktikan *jika $6|a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a* Bukti: Teorema: jika $a|b$, dan $a|c$, maka $a|b - c$. Sehingga jika $6|a^3$, dan $6|a$, maka $6|a^3 - a$. Dengan demikian, Jika $6|a$, maka ada $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a = 6m$ Subtitusi: $a^3 - a = (6m)^3 - 6m$

Peneliti/ Subjek		Stimulus atau respon
		$= 216m^3 - 6m$ $= 6(36m^3 - m)$ Karena $a^3 - a = 6(36m^3 - m)$, dengan $(36m^3 - m)$ adalah bilangan bulat, maka sesuai dengan definisi keterbagian diperoleh $6\|a^3 - a$ (terbukti)
Peneliti	:	Baik, Berdasarkan hasil koreksi kami antara lembar jawaban dan dokumentasi wawancara ini, kami melihat anda menulis kesalahan pada penganalogian Teorema: jika $a\|b$, dan $a\|c$, maka $a\|b - c$. Dengan demikian, Jika $6\|a^3 - a$, dan $6\|a$, maka $6\|a^3 - a$. Seharusnya Jika $6\|a^3$, dan $6\|a$, maka $6\|a^3 - a$
AFD	:	Iya pak, salah.
Peneliti	:	Kemudian kesalahan kedua, terletak pada kesimpulan bukti pada wawancara ini $6\|a^3 - a$, sementara pada lembar jawaban anda $a\|b - c$.
AFD	:	Iya pak, yang benar adalah $6\|a^3 - a$
Peneliti	:	Oke benar. Apakah ada teknik atau metode lain membuktikan soal pembuktian ini?
AFD	:	Enggih, ada pak. Misalnya kita bisa menggunakann teknik induksi matematika.
Peneliti	:	Apakah ada teknik lain selain induksi matematika?
AIM	:	Untuk sementara ini, teknik itu saja yang kami ketahui pak, karena memang pada perkuliahan sebelumnya kita tidak terlalu dituntut untuk membuktikan, sehingga pengalaman menggunakan metode bukti yang lainnya masih belum maksimal.

Setelah mendapat refleksi melalui wawancara, akhirnya subjek AFD bisa memperbaiki kesalahan dalam mengonstruksi bukti dari permasalahan yang diberikan. Kesalahan ini sepertinya dipengaruhi oleh sifat terburu-buru/lupa, atau mungkin masih belum terlalu memahami teorema atau definisi yang dituliskan, namun saat kembali diminta penjelasan melalui wawancara ini subjek AFD tampak telah memahami soal yang diberikan (masalah). Hal ini biasa terjadi, karena pada dasarnya seseorang tidak mau melakukan kesalahan untuk yang kedua kalinya, dan dari konstruksi bukti yang dilakukan oleh subjek AFD ini, memperlihatkan bahwa pemahaman terhadap definisi dan teorema yang sebelumnya terbukti sangat membantu seseorang dalam melakukan pembuktian atas permasalahan bukti yang baru diberikan.

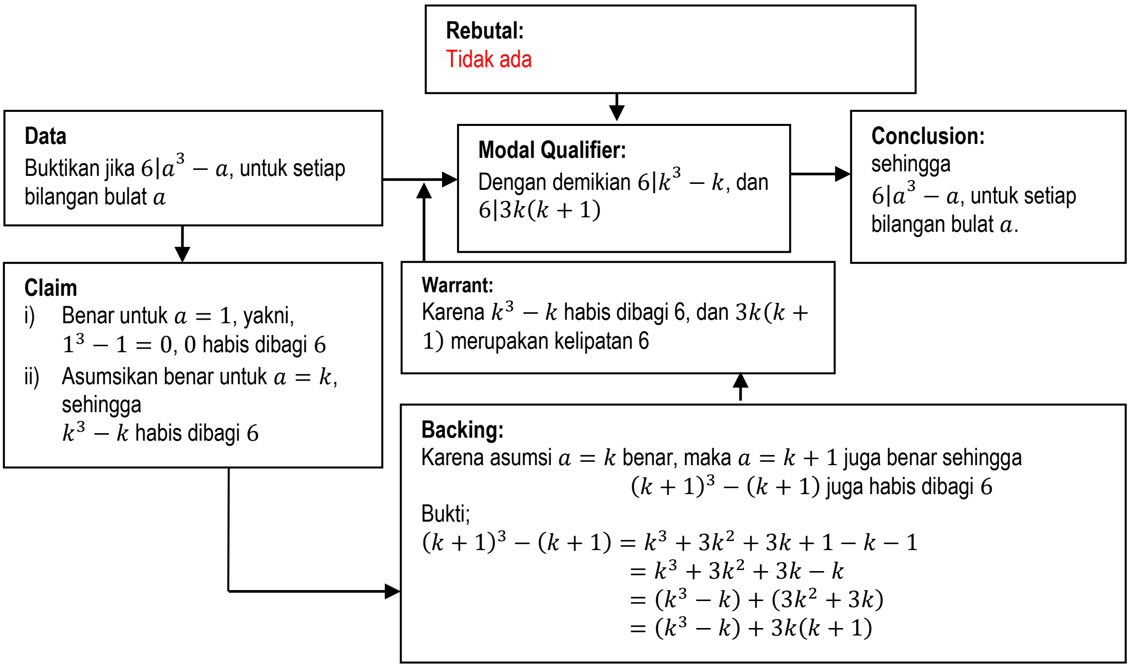
b. Subjek WSD

Subjek WSD adalah subjek yang mewakili 31 subjek yang mengonstruksi bukti dengan teknik bukti langsung. Berikut ini adalah lembar jawaban dari subjek WSD.


3. Buktikan jika $6|a^3-a$, untuk setiap bilangan bulat a.
Peny: (Dengan induksi matematika)
(i). Benar untuk $a=1$, yaitu:
$6|1^3-1=0$
(ii). Asumsikan benar untuk $a=k$, sehingga:
$6|k^3-k$
Karna asumsi $a=k$ benar, maka $a=k+1$ juga benar, shg:
$6|(k+1)^3-k+1$
$6|k^3+3k^2+3k+1-k+1$
$6|(k^3-k)+3k^2+3k$
$6|(k^3-k)+3k(k+1)$
Karna k^3-k habis dibagi 6 dan $3k(k+1)$ merupakan kelipatan 6. Dengan demikian $6|k^3-k$ dan $6|3k(k+1)$.
Sehingga $6|a^3-a$ untuk setiap bilangan bulat a.

Gambar 6. Lembar Jawaban Pembuktian subjek WSD

Lembar jawaban pembuktian oleh subjek WSD akan kembali digambarkan dalam skema argumen berikut.



Gambar 7. Skema argumen menggunakan teknik Induksi Matematika subjek AFD

Berdasarkan lembar jawaban dan struktur dalam skema argument pada gambar 7 di atas, tampak terlihat bahwa subjek WSD menulis bahwa $3k(k+1)$ merupakan kelipatan 6. Asumsi ini perlu ditanyakan kembali dalam wawancara berikut.

Tabel 2. Transkrip wawancara Subjek WSD

Peneliti/ Subjek		**Stimulus atau respon**
Peneliti	:	Apa yang anda ketahui dan pahami dari masalah: *Buktikan jika $6|a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a*
WSD	:	Kita diminta untuk menunjukkan bahwa $6|a^3 - a$, *untuk setiap bilangan bulat* a
Peneliti	:	Pengetahuan atau pemahaman apa yang diperlukan untuk membuktikan masalah ini?
WSD	:	Soal ini adalah soal keterbagian bilangan bulat, namun soal ini dapat dibuktikan menggunakan teknik induksi matematika yang sudah disampaikan pada pertemuan awal perkuliahan.
Peneliti	:	Bagaimana anda mengonstruksi bukti dari masalah ini berdasarkan pengetahuan anda tentang teknik Induksi matematika.
WSD	:	Kita harus mengetahui dan memahami definisi dan langkah-langkah pembuktian menggunakan metode induksi matematika, seperti berikut: *Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan perihal bilangan bulat positif n. Jika kita ingin membuktikan bahwa $P(n)$ benar, maka kita hanya perlu menunjukkan bahwa:* *1) $P(1)$ benar, dan* *2) Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, Jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.* *Sehingga $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$*
Peneliti	:	Baik, sekarang coba buktikan permasalah di atas menggunakan teknik induksi matematika.

Peneliti/ Subjek	Stimulus atau respon
WSD	: Buktikan jika $6\|a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a Penyelesaian i) Benar untuk $a = 1$, yakni, $1^3 - 1 = 0$, 0 habis dibagi 6 ii) Asumsikan benar untuk $a = k$, sehingga $k^3 - k$ habis dibagi 6 Karena asumsi $a = k$ benar, maka $a = k + 1$ juga benar sehingga $(k + 1)^3 - (k + 1)$ juga habis dibagi 6 **Bukti;** $(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$ $= k^3 + 3k^2 + 3k - k$ $= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k)$ $= (k^3 - k) + 3k(k + 1)$ Karena $k^3 - k$ habis dibagi 6, dan $3k(k + 1)$ merupakan kelipatan 6 Dengan demikian $6\|k^3 - k$, dan $6\|3k(k + 1)$ Sehingga $6\|a^3 - a$, untuk setiap bilangan bulat a.
Peneliti	: Baik, coba sekarang tunjukkan dengan induksi matematika $3k(k + 1)$ merupakan kelipatan 6
WSD	: Untuk menunjukkan $3k(k + 1)$ atau $3n(n + 1)$ kelipatan 6, cukup dengan: i) Benar untuk $n = 1$, yakni $3 \cdot 1(1 + 1) = 6$, 6 adalah kelipatan 6 (dirinya sendiri) ii) Asumsikan benar untuk $n = k$, sehingga $3k(k + 1)$ kelipatan 6 Karena asumsi $n = k$ benar, maka $n = k + 1$ juga benar sehingga $3(k + 1)(k + 2)$ kelipatan 6 **Bukti;** $3(k + 1)(k + 2) = 3(k^2 + 3k + 2)$ $= 3k^2 + 9k + 6$ $= 3k^2 + 3k + 6k + 6$ $= (3k^2 + 3k) + (6k + 6)$ $= 3k(k + 1) + 6(k + 1)$ Karena $3k(k + 1)$, dan $6(k + 1)$ adalah sama-sama kelipatan 6, maka $3n(n + 1)$ adalah kelipatan 6
Peneliti	: Baik, good. Selain teknik induksi, apakah ada teknik bukti lainnya yang dapat digunakan untuk membuktikan permasalahan pertama di atas?
WSD	: Selain teknik induksi matematika, sebenarnya masih ada teknik lain yang dapat digunakan untuk membuktikan permasalah di atas, yakni teknik bukti-langsung dan teknik bukti tak-langsung. Namun kedua teknik ini belum saya pelajari lebih dalam, dan pada awal pertemuan hanya dikenalkan dengan teknik induksi matematika.
Peneliti	: Baik, itu akan menjadi masukan kami dalam pengajaran.

Setelah mendapat refleksi melalui wawancara. Dapat diketahui bahwa subjek WSD sangat memahami teknik bukti dengan induksi matematika, namun masih belum yakin telah mendalami teknik bukti langsung atau bukti langsung oleh karena diawal perkuliahan teori bilangan belum disampaikannya kedua teknik bukti tersebut.

Berdasarkan hasil analisis lembar jawaban pembuktian dan penelusuran/konfirmasi lembar jawaban melalui aktivitas wawancara dan dokumentasi, dapat diketahui bahwa kemampuan mahasiswa dalam mengonstruksi bukti atau argumen banyak didominasi oleh bukti induksi matematika, sehingga dibutuhkan pengenalan/pembahasan lebih mendalam terkait berbagai macam teknik pembuktian atau teknik penarikan kesimpulan lebih awal melalui mata kuliah analisis, seperti logika dan himpunan, landasan matematika, dan kalkulus.

Perlu diketahui teknik pembuktian dibagi menjadi menjadi 3, yakni: bukti langsung (*direct proof*), bukti tak-langsung (*indirect proof*), dan induksi matematika (Morash, 1987;Bartle & Sherbert, 2011). Antara teknik bukti langsung, bukti tak langsung, dan induksi matematika. Ketiga-tiganya merupakan teknik penarikan kesimpulan yang valid. Bukti langsung diterapkan untuk membuktikan teorema yang berbentuk implikasi $p \rightarrow q$. Sementara bukti tak-langsung dibedakan menjadi bukti kontrapositif ($p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$), dan bukti kontradiksi $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$. Selanjutnya teknik Induksi Matematika, merupakan teknik pembuktian yang sering digunakan untuk menetapkan validitas suatu proposisi yang berkaitan dengan bilangan asli (Munir, 2016; Bartle & Sherbert, 2011; Hine, 2013), dan satu-satunya teknik pembuktian dengan secara Induksi (dari hal khusus menyimpulkan hal yang umum) (Bartle & Sherbert, 2011).

Ketiga jenis teknik pembuktian ini dijadikan sebagai alat ukur untuk melihat kelengkapan struktur argumen mahasiswa dalam mengonstruksi bukti yang diajukan. Adapun hasilnya dapat dipastikan bahwa argumen deduktif mahasiswa sangatlah dipengaruhi oleh ide-ide sebelumnya, dalam artian ide-ide sebelumnya belum bisa menjadi material untuk membangun ide baru (pemahaman). Material atau ide-ide sebelumnya disini bisa berupa aksioma, definisi, teorema atau sifat-sifat yang dapat membantu dalam mengonstruksi sebuah bukti. Dampak yang ditimbulkan akibat ketidaklengkapan ide dalam aktivitas mengonstruksi bukti dalam makalah ini adalah 1) integrasi pemahaman terhadap mata kuliah teori bilangan dengan mata kuliah sebelumnya belum baik; 2) minimnya pemahaman terhadap aksioma, definisi dan teorema yang terbukti sebelumnya, sehingga belum mampu melihat bahwa teorema baru dibangun atas aksioma, definisi, dan teorema sebelumnya; dan 3) memungkinkan terjadinya konflik kognitif pada pengenalan materi teknik pembuktian langsung dan tak-langsung pada mata kuliah analisis lainnya (analisis real, analisis kompleks, dll).

KESIMPULAN

Berdasarkan grafik, skema argumentasi dan transkrip wawancara mahasiswa di atas, menyimpulkan bahwa teknik induksi matematika masih menjadi metode dominasi, yang dipengaruhi oleh ketidaklengkapannya material ide (aksioma, definisi, teorema sebelumnya) untuk mengonstruksi ide baru (pemahaman). Sehingga dampak yang ditimbulkan akibat ketidaklengkapan ide ini adalah 1) integrasi pemahaman terhadap mata kuliah teori bilangan dengan mata kuliah sebelumnya belum baik; 2) belum mampu melihat bahwa teorema baru dibangun atas aksioma, definisi, dan teorema sebelumnya; dan 3) memungkinkan terjadinya konflik kognitif pada pengenalan materi teknik pembuktian langsung dan tak-langsung pada mata kuliah yang banyak menuntut kemampuan dalam mengkonstruksi argumen.

SARAN

Berdasarkan kesimpulan di atas, diperlukan pembahasan lebih mendalam terkait teknik pembuktian pada awal perkuliahan mata kuliah analisis, seperti logika dan himpunan, landasan matematika, dan kalkulus, agar mahasiswa dapat lebih dini mempelajari ide-ide baru, konsep baru, strategi baru yang dapat diasimilasi ke dalam perkuliahan analisis lebih lanjut. Serta pentingnya kajian lebih mendalam terkait jenis kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti, agar dapat membantu dalam menentukan, menggunakan serta mengembangkan model pembelajaran/perkuliahan yang dapat membelajarkan dan meningkatkan pemahaman terhadap bukti.

DAFTAR PUSTAKA

Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation*, *19*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10503-005-4417-8

Aberdein, A. (2009). Mathematics and argumentation. *Foundations of Science*, *14*(1–2), 1–8. https://doi.org/10.1007/s10699-008-9158-3

Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' Example Use in Proof Construction: Purposes and Effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*. https://doi.org/10.1080/24727466.2010.11790298

Balacheff, N. (2017). A study of students' proving processes at the junior high school level.

Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education, *December*, 284–297.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (Fourth Edi). John Wiley & Sons, Inc.

Devlin, K. (2003). Sets, Functions, and Logic: An Introduction to Abstract Mathematics. In *Sets, Functions, and Logic* (Third Edit). CRC Press.

Dumas, B. A., & McCarthy, J. E. (2015). Transition to Higher Mathematics: Structure and Proof (Second Edition). In *Creative Commons Attribu- tion, NonCommercial License*. https://doi.org/10.7936/K7Z899HJ

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hine, G. (2013). Proof by mathematical induction : Professional practice for secondary teachers. *Mathematics: Lauching Futures*, 1–8.

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis Loughborough, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 62–101. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0062

Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications Second Edition* (Second). Elsevier Inc.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

Morash, R. P. (1987). Bridge to abstract mathematics: Mathematical Proof and Structures. In *Choice Reviews Online* (Vol. 50, Issue 06). Random House, Inc. https://doi.org/10.5860/choice.50-3317

Munir, R. (2016). *Induksi matematik*. Program Studi Teknik Informatika, STEI ITB.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. In *School Science and Mathematics*. The Council.

Netti, S., Sutawidjaja, A., & Mulyati, S. (2017). Skema Berpikir Mahasiswa Ketika Mengostruksi Bukti Matematis. *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika Dan Nilai Islami)*, *1*(1), 547–555.

Purwanto. (2015). Argumen Valid. In *Pidato Pengukuhan Jabatan Guru Besar dalam Bidang Ilmu Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam disampaikan pada Sidang Terbuka Senat Universitas Negeri Malang tanggal 26 Oktober 2015* (pp. 1–27). Universitas Negeri Malang. http://library.um.ac.id/images/2015-Argumen-Valid- Prof-Drs-Purwanto-Ph.D.pdf

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*, 5–41. https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5

Rosen, K. H. (2011). *Elementary Number Theory & Its Applications (Sixth Edition)* (Sixth Edit). Addison-Wesley is an imprint of Pearson.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4–36. https://doi.org/10.2307/30034698

Simpson, A. (2015). The Anatomy of a Mathematical Proof: Implications for Analysis with Toulmin's Schema. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 1–17. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9616-0

Toulmin, S. E. (2003). The uses of argument: Updated edition. In *The Uses of Argument: Updated Edition* (Update Edi). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Seventh Ed). Allyn & Bacon is an Imprint of Pearson.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119. https://doi.org/10.1023/A:1015535614355

Weber, K. (2003). Research Sampler 8: students' difficulties with proof. *The Mathematical Association of America: Online*, *1*, 1–8. http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 431–459.

Wikipedia contributors. (2020). *Theorem*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Theorem&oldid=944519294